ALICIA ROJO ARIAS

Estudio de máximos locales, mínimos locales y puntos silla de una función $f \in C^3(\mathbb{R}^N)$

CONDICIÓN NECESARIA: SER PUNTOS $x_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ CRÍTICOS.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{N-1}}(x_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) = 0$$

Desarrollo de Taylor de f en x_0: $f(x_0+h) - f(x_0) = Hf(x_0)(h) + R_2(h, x_0)$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R_2(h,x_0)}{\|h\|^2} = 0$

$$Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{N-1} & h_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{N-1}\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{N-1}\partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_0) & \ddots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_3}(x_0) \\ \cdot & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{N-1}\partial x_N}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_N}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N-1} \\ h_N \end{pmatrix}$$

Estudio del signo de $Hf(x_0)(h)$. Completamos cuadrados en la forma cuadrática.

La Matriz Hessiana en x_0 es simétrica $\Rightarrow$ diagonalizable. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}, \lambda_N$ sus valores propios, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$, $det(H) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{N-1} \cdot \lambda_N$

A_k menor principal de orden k.

$Hf(x_0)$: definido positiva
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}, \lambda_N > 0$
Sylvester: $det(A_K) > 0,\ \forall K$
MINIMO LOCAL

$Hf(x_0)$: definido negativa
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}, \lambda_N < 0$
Sylvester: $(-1)^K det(A_K) > 0,\ \forall K$
MAXIMO LOCAL

$Hf(x_0)$: ni definida positiva ni definida negativa
Algunos valores propios positivos, otros negativos
PUNTO SILLA

$Hf(x_0)$: ni definida positiva ni definida negativa
Algún valor propio es cero, luego $det(H) = 0$
ESTUDIO LOCAL DE LA FUNCIÓN

Estudio de máximos locales, mínimos locales y puntos silla de una función $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$

CONDICIÓN NECESARIA: SER PUNTOS $P(x_0, y_0)$ CRÍTICOS.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Desarrollo de Taylor de f en $P(x_0, y_0)$: $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = Hf(x_0, y_0)(h) + R_2(h, (x_0, y_0))$, $\lim_{h \to 0} \frac{R_2(h, (x_0, y_0))}{\|h\|^2} = 0$

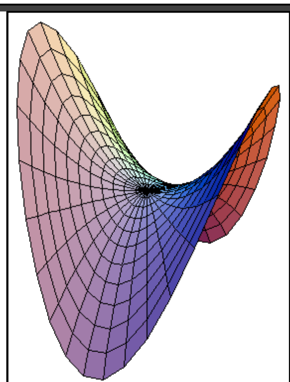
$$Hf(x_0, y_0)(h) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Estudio del signo de $Hf(x_0, y_0)(h)$. Completamos cuadrados en la forma cuadrática.

La Matriz Hessiana en $P(x_0, y_0)$ es simétrica $\Rightarrow$ diagonalizable. λ_1 y λ_2 sus valores propios, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $det(H) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$det(H) < 0$
PUNTO SILLA
$\text{sign}(\lambda_1) \neq \text{sign}(\lambda_2)$

Estudio local de la función
En algunas direcciones es un máximo
En algunas direcciones es un mínimo



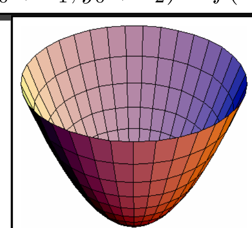
$det(H) = 0$
Punto crítico degenerado
λ_1 y/ó $\lambda_2 = 0$

Estudio local de la función
Estudio de derivadas sucesivas

$det(H) > 0$
Extremo local
$\text{sign}(\lambda_1) = \text{sign}(\lambda_2)$

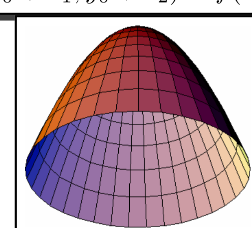
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) > 0$

MÍNIMO LOCAL
$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) > f(x_0, y_0)$



$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) < 0$

MÁXIMO LOCAL
$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) < f(x_0, y_0)$



$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) = 0$

Este caso no posible
$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} = -b^2 < 0$