Matemáticas I. Ingeniería Química. Curso 2016/2017

Hoja 4 : Funciones de varias variables

Máximos y mínimos

1.- (a) Hallar todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Averiguar si existen el máximo y el mínimo de esta función.
(b) Comprobar que la función $f(x,y) = e^x \cos y$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

2.- Determinar todos los puntos críticos de la función f y su caracter (si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla):
(a) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 - x^4y^2$.
(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.
(c) $f(x,y) = e^{xy} + x^2$.
(d) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

3.- Comprobar que la función $f(x,y) = x^2y^2$ tiene un mínimo absoluto en todos los puntos de los ejes x e y pero que, sin embargo, el criterio de la matriz Hessiana para los extremos locales es inútil porque no nos proporciona ninguna información en este caso.

4.- Calcular el mínimo y el máximo de la función $f(x,y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Encontrar los puntos donde se alcanzan.

5.- Sean m, n, p, a constantes positivas. Calcular el mínimo y el máximo de la función

$$f(x,y,z) = x^m y^n z^p$$

sobre el conjunto $x + y + z = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Integración de funciones de varias variables

6.- Evalúa las integrales dobles siguientes, donde R es la región acotada por las ecuaciones que se dan en cada caso (habrá que elegir el orden de integración más conveniente).

1. $\iint_R x^3y^2\, dA$; $\quad y = x$, $y = 0$, $x = 1$
2. $\int_R (2x + 4y + 1)\, dA$; $\quad y = x^2$, $y = x^3$
3. $\iint_R 2xy\, dA$; $\quad y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$

7.- Invierte el orden de integración en las integrales iteradas siguientes:

1. $\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\, dx\, dy$
2. $\int_0^3 \int_1^{e^x} f(x,y)\, dy\, dx$

8.- Usa coordenadas polares para evaluar las integrales siguientes:

1. $\iint_R e^{x^2+y^2}\, dA$, con R la corona circular de radio entre 1 y 2.
2. $\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5+x^2+y^2}\, dy\, dx$.

9.- Dibuja la región tridimensional de integración correspondiente a la siguiente integral triple:

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

10.- Expresa la integral del ejercicio anterior como integral iterada en el orden $dy\, dx\, dz$

11.- Calcula $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z \, dz \, dx \, dy$

12.- Calcula $\iiint_R ze^{x^2+y^2} \, dV$ donde R es el cilindro de base circular de radio 2 centrada en el origen y altura $0 \leq z \leq 5$.

13.- Calcula $\iiint_R e^{x^2+y^2+z^2} \, dV$ con R la parte en el primer octante de la esfera de radio 1 centrada en el origen. ¿Y si se cambia R por toda la esfera de radio 1?

14.- ¿Qué integral triple habría que plantear para calcular el volumen de una esfera de radio ρ en coordenadas cartesianas? ¿Y en coordenadas esféricas? Calcula el volumen de dicha esfera.

Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

15.- $\int_Q (2x+3y+z) \, dx \, dy \, dz$ con $Q = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$.

16.- $\int_T x^2 \cos z \, dx \, dy \, dz$ siendo T la región limitada por los planos $x=0, y=0, z=0, z=\pi, x+y=1$.

17.- $\int_\Omega x\, y^2\, z^3 \, dx \, dy \, dz$ siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = x\,y$ y los planos $y=x, x=1$ y $z=0$.

18.- $\int_\Omega x\, y \sqrt{z} \, dx \, dy \, dz$ siendo Ω el sólido limitado por la superficie $y=x^2$ y los planos $y=z, y=1$ y $z=0$.

Calcula los siguientes volúmenes:

19.- volumen de la intersección del cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ y la bola $x^2+y^2+z^2 \leq 16$;
20.- volumen del sólido limitado por los conos $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = -1 + \sqrt{x^2+y^2}$;
21.- volumen de la región limitada por el paraboloide $z = x^2+y^2$ y el cilindro $x^2+y^2 = 4$ en $z \geq 0$;

Solución: 19) $32\pi(8-3\sqrt{3})/3$; **20)** $2\pi/3$; **21)** 8π;

En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int_\Omega f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$ de la función positiva f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z=0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz \, dx \, dy$.

22.- $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x,y,z) \, dz \right) dy \right) dx.$

23.- $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z) \, dz \right) dy \right) dx.$

24.- $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) \, dz \right) dy \right) dx.$

Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales triples. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

25.- $\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+9)^2} \, dx \, dy \, dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

26.- $\iiint_C x\, y\, z \, dx \, dy \, dz$ con $C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ x,y,z \geq 0 \right\}$.

27.- $\iiint_D (x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.

Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

28.- $\iiint_\Omega (x^2+y^2) \, dx \, dy \, dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2 = 2\,z$ y el plano $z=2$.

29.- $\iint_\Omega dx\,dy\,dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2 + y^2$ y $x + y = 1$.

30.- $\iiint_\Omega (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$ siendo Ω un cono recto de revolución, de altura h, base de radio $a > 0$ situado en el plano $z = 0$ y eje en el eje Z.

31.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x, y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)^{\mathbf{T}}$, $a = (1, 2)^{\mathbf{T}}$.

(b) $f(x, y) = (\operatorname{sen}(x + y), \cos(x - y))^{\mathbf{T}}$, $a = (\pi, -\pi/4)^{\mathbf{T}}$.

(c) $f(x, y, z, t) = (\sqrt{y^2 + z^2}, \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + y^2 + z^2 - 9\,t^2)^{\mathbf{T}}$, $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)^{\mathbf{T}}$.

32.- Sea $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ con $u = \frac{x-y}{2}$, $v = \frac{x+y}{2}$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x, y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

33.- Las relaciones $u = f(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplicar la regla de la cadena para calcular la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x, y) = e^{x\,y} \cos x\,y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

34.- La sustitución $t = g(x, y)$ convierte $F(t)$ en $f(x, y) = F(g(x, y))$. Calcular la matriz de $Df(x, y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.