Matemáticas I. Ingeniería Química. Curso 2016/2017

Hoja 3

Ejercicio adicional sobre los límites

1.- Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

$$(a)\quad \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{2x-2\sqrt{3}}, \qquad (b)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1},$$

$$(c)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (2\operatorname{sen}^2 x - 1)\arctan(2x), \qquad (d)\quad \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{e^x+x}{e^x-x}}.$$

La definición de la función inversa

2.- Decide, si existe la función inversa a $f(x)$. En este caso, calcula esta función e indica su dominio de definición.

$$(a)\quad f(x)=\operatorname{tg}^2(x),\quad \mathcal{D}(f)=\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big). \qquad (b)\quad f(x)=\operatorname{sen}(x),\quad \mathcal{D}(f)=\Big[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\Big].$$

$$(c)\quad f(x)=x-x^2,\quad \mathcal{D}(f)=(-\infty,-1). \qquad (d)\quad f(x)=\operatorname{tg}^2(x),\quad \mathcal{D}(f)=\Big(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\Big).$$

Integración

3.- La velocidad de variación de una población de bacterias con recursos limitados viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt}=-2(x-5),$$

donde x es el "número de bacterias (en millones)" y t es el "tiempo transcurrido (en horas)". Inicialmente hay 1 millón de bacterias.

(a) Hallar la función que expresa x en función de t, resolviendo la ecuación diferencial.
(b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 2 horas? ¿Cuántas habrá a largo plazo?

4.- Las siguientes integrales indefinidas se pueden calcular sin más que hacer alguna manipulación ó ajustar alguna constante (son integrales *inmediatas*), o con un cambio de variables obvio.

$$\text{(a)} \int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{2\,x^2+8} \qquad \text{(c)} \int \frac{x+4}{x+2}\,dx$$

$$\text{(d)} \int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx \qquad \text{(e)} \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx \qquad \text{(f)} \int \frac{x}{x^4+4}\,dx$$

$$\text{(g)} \int \frac{x}{x^2+4}\,dx \qquad \text{(h)} \int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \qquad \text{(i)} \int x\operatorname{sen} x^2\,dx$$

5.- Calcula las integrales indefinidas siguientes por el método de integración por partes:

$$\text{(a)} \int x\,\log x\,dx \qquad \text{(b)} \int x^2\,\operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{(c)} \int \cos(2\,x)\,e^{3\,x}\,dx$$

6.- Calcula las integrales indefinidas siguientes de las funciones trigonométricas:

$$\text{(a)} \int \operatorname{tg}^2(ax)\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos^2 x} \qquad \text{(c)} \int \operatorname{tg}(2\,x)\,dx.$$

7.- Calcula el área delimitada por las curvas siguientes:

$$\text{(a) } \{y = \operatorname{sen} x, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0\}\,; \qquad \text{(b) } \{y = 5 - x^2, y = 3 - x\}\,.$$

8.- La región (infinita) encerrada entre $y = 0$ y la gráfica de la función $y = 1/x^2$ entre $x = 1$ e infinito tiene área finita. ¿Cuánto vale dicha área?

Ayuda.- Calcula el área entre $x = 1$ y $x = N$ y luego haz el límite cuando $N \to \infty$.

9.- ¿Es finita el área de la región comprendida entre $y = 0$ e $y = 1/x$ de $x = 1$ en adelante? ¿Y si se cambia $1/x$ por e^{-x}?

10.- Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t) = t(1 - t)$ unidades por segundo. Su posición inicial es 2 unidades a la izquierda del origen.

(a) Halla la posición del objeto 10 segundos más tarde.

(b) Halla la distancia total recorrida por el objeto en esos 10 segundos.

11.- Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v(t) = At^2 + 1$, expresada en metros por segundo. Calcula A sabiendo que $x(1) = x(0)$. Halla la distancia total recorrida por la partícula durante el primer segundo.

12.- El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30\, e^{-0.1\, t}}{(1 + 3\, e^{-0.1\, t})^2} \qquad (t\text{=“tiempo en años”}).$$

a) Calcula la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$.
b) Si $N(0) = 25$. ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

13.- Durante una epidemia de gripe en una población, la velocidad de propagación de la enfermedad, es decir, la velocidad de variación del número de enfermos es (aproximadamente):

$$v(t) = 1000\ t\ e^{-0.5\, t}$$

donde t es el número de días desde el inicio de la epidemia.

(a) Calcula el número de individuos que se ponen enfermos durante los cuatro primeros días.

(b) ¿En qué momento es máxima la velocidad de propagación de la gripe?

14.- Una piscifactoría coloca a los alevines de 1 centímetro de longitud en tanques especiales. Se estima que la velocidad de crecimiento de un alevín desde el instante en que se instala en dicho tanque viene dada, en tiempo t (meses) por $v(t) = \dfrac{16t}{(t^2 + 1)^2}$ (velocidad dada en centímetros por mes). ¿Qué tamaño tendrán los peces 3 meses después de ingresar en los tanques?

Diferenciación y extremos de funciones de varias variables

15.- Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x, y) = x - y + 2$ (b) $f(x, y) = x^2 + 4\,y^2$ (c) $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$

16.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x, y, z) = x - y - z + 2. \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

$$f(x, y, z) = x - y. \qquad f(x, y, z) = -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z.$$

17.- Si nos encontramos en el punto $(-1, -1)$ de una zona montañosa cuyo perfil viene dado por $f(x, y) = x^2 e^y + xy$ y miramos en la dirección del eje x positivo: ¿vemos una cuesta hacia arriba o hacia abajo? ¿Y si miramos en la dirección del eje y negativo? De todas las direcciones (360 grados) en las que podemos mirar a nuestro alrededor, ¿en cuál de ellas se divisa una cuesta abajo más pronunciada cerca de nosotros?

18.- Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$.
2. $f(x, y) = xy^2 + 2x^2 y - 6xy$.
3. $f(x, y) = 3y^2 + 4x^2 - 4xy + 2y + 4x$.
4. $f(x, y) = \frac{3}{5} x^5 - 3xy^2 + 3y$.

19.- Una empresa de agricultura ecológica produce 12 toneladas mensuales de producto, de las que reserva una cantidad x para venta de productos frescos, una cantidad y para congelados y el resto para precocinados. Si la ganancia mensual neta de la empresa está dada, en miles de euros, por la expresión $30 + xy + xz + yz + x - z$, se pide:

a) Determina las cantidades x, y, z para que la ganancia mensual neta sea lo mayor posible.
b) ¿Cuál es la ganancia mensual neta más grande posible que tendrá la empresa?

20.- Para guardar muestras, necesitamos cajas de cartón, como las de zapatos, pero con la tapa de plástico. Cada cm^2 de cartón cuesta un céntimo de euro y cada cm^2 de plástico cuesta tres céntimos. Las cajas deben tener un volumen de 2000 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más barata posible?

21.- Se desea construir una balsa para lodos con forma de paralelepípedo rectángulo y con un volumen de 1 m^3. ¿Qué dimensiones debe tener para que la suma de la superficie lateral más la superficie del fondo (que son las que van recubiertas) sea mínima?

22.- Aplica el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos de la función $f(x, y) = y^2 - 4x$ sujetos a $x^2 + y^2 = 9$.

23.- ¿Cómo se debe dividir un segmento de longitud L en tres partes de modo que el producto de sus longitudes sea máximo?