Matemáticas I. Ingeniería Química. Curso 2016/2017

Hoja 1: Números complejos.

1) Dados los números complejos $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - 3i$, calcula z^2, z^{-1}, $w \cdot z$ y w/z.

2) Despeja z en la ecuación $(2 + 3i)z + (4 - i) = (2 + i)z - 4i$.

3) Resolver $iz + (2 - 10i)z = 3z + 2i$.
Solución: $-9/41 - i/41$.

4) Halla un polinomio de segundo grado con coeficientes enteros que tenga como raíz al número complejo $z_0 = 2 - i$.

5) Comprueba que si $z = a+bi$ es una raíz de cierto polinomio P con coeficientes reales, entonces $\overline{z} = a-bi$ también es una raíz del mismo polinomio.
Ayuda.- Recuerda que $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ y $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

6) Usando el ejercicio anterior, demuestra que un polinomio con coeficientes reales y grado impar siempre tiene al menos una raíz real. Muestra un ejemplo de polinomio de grado cuatro que no tenga raices reales.

7) Calcula el módulo y el argumento de $z = -2 + 2i$, $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. ¿Cuál es el módulo y argumento de zw y de z/w?

8) Describir el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:
(i) $|z - 2| > |z + 2|$; (ii) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.

9) Demostrar las fórmulas:
(i) $|z + 1|^2 - |z - 1|^2 = 4 \operatorname{Re} z$; (ii) $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2 + 2\,|z|^2$.

10) Dado n un número entero, el polinomio $z^n - 1$ tiene n raíces complejas, pero ninguna de ellas tiene módulo mayor que uno. ¿Por qué?
Ayuda.- Que z_0 sea una raíz de ese polinomio se puede reescribir como $z_0^n = 1$.

11) Resolver $z^3 = i$ en coordenadas polares y rectangulares. (Recordatorio: las coordenadas rectangulares, o cartesianas, o binómicas, son de la forma $a + ib$; las polares, $re^{i\alpha}$).
Solución (parcial): $\sqrt{3}/2 + i/2, -\sqrt{3}/2 + i/2, -i$.

12) Escribir en coordenadas polares $4 + i, -3/2 - i/2, -1 + 2i$.

13) Comprobar que $(1 + i)^{12} = -64$, y $((1 - i)/\sqrt{2})^{-6} = -i$.

14) Resolver las siguientes ecuaciones i) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$; ii) $z^4 = i$; iii) $z^3 = -8i$.
Soluciones a iii): $z = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$.

15) Resolver $z^2 = -8 - 6i$.

16) Resolver $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.
Solución: $2 - i, 1 + 2i$.