APUNTES DE CÁLCULO I

Elaborados por Prof. José Manuel Rodríguez García (UC3M),

Ingenierías técnicas industriales

Versión abreviada, redactada por D. Yakubovich (2016)

1. Límites de funciones

Definición 1.1. *Una función es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y sólo uno a cada número de un cierto conjunto.* $f(x)$ *es el valor de la función* f *en el punto* x.

Definición 1.2. *El dominio de una función es el conjunto de números para los que está definida, y se denota por* $\mathrm{Dom}(f)$.

Límites finitos

Definición 1.3. *Sea* l *un número real (finito). Decimos que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *(y se lee: el límite cuando* x *tiende a* x_0 *de* $f(x)$ *es* l*) si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *si* $0 < |x - x_0| < \delta$.

Definición 1.4. *Un entorno reducido de* x_0 *es un conjunto de la forma* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$*, o lo que es lo mismo,* $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$*, para algún* $\delta > 0$.

Teorema 1.1. *Si existe el límite cuando* x *tiende a* x_0 *de* $f(x)$*, entonces es único. Es decir, si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = m$*, entonces* $l = m$.

Teorema 1.2. *Si existen* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$*, entonces:*

$$(1) \quad \lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

$$(2) \quad \lim_{x\to x_0} \big(f(x) g(x)\big) = \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big)\,.$$

$$(3) \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\,, \quad \textit{si } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\,.$$

$$(4) \quad \lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \quad \textit{si el resultado es distinto de } 0^0.$$

$$(5) \quad \lim_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big), \quad \textit{si } a > 0 \textit{ y } \lim_{x\to x_0} f(x) > 0\,.$$

Definición 1.5. *Una función* f *está acotada en un conjunto* A *si existe una constante* M *tal que* $|f(x)| \leq M$ *para todo* $x \in A$.

Teorema 1.3. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *y* g *es una función acotada en un entorno reducido de* x_0*, entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}^2(x^{-2})$. Poniendo $f(x) = x$, $g(x) = \mathrm{sen}^2(x^{-2})$ y tomando en cuenta que $|g(x)| \leq 1$ para todo $x \neq 0$, obtenemos que el límite $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}^2(x^{-2})$ existe y es igual a 0.

Definición 1.6. *a) Decimos que* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ *(y se lee: el límite cuando* x *tiende a* x_0 *por la derecha de* $f(x)$ *es* l*) si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *si* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

b) Decimos que $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$ *(y se lee: el límite cuando* x *tiende a* x_0 *por la izquierda de* $f(x)$ *es* l*) si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *si* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Teorema 1.4. *Se tiene que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *si y sólo si* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$. *En particular, si* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$*, entonces no existe* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Límites infinitos

Definición 1.7. *a) Decimos que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *si para todo número real* M *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > M$ *si* $0 < |x - x_0| < \delta$.

b) Decimos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *si para todo número real* M *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < M$ *si* $0 < |x - x_0| < \delta$.

De forma similar pueden definirse los límites infinitos cuando $x \to x_0^+$ y $x \to x_0^-$.

También pueden definirse los límites de funciones en el infinito, como ocurría para las sucesiones. La diferencia es que aquí x es una variable continua, y puede tender a ∞ o a $-\infty$.

Definición 1.8. *a) Decimos que* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número real* M *tal que* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *si* $x > M$.

b) Decimos que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número real* M *tal que* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *si* $x < M$.

De forma similar pueden definirse los límites infinitos en el infinito.

Debemos plantearnos ahora una pregunta importante: ¿son ciertos los teoremas anteriores para todas estas clases de límites? La respuesta es sí, siempre que tengan sentido. Estudiemos cada caso particular con detalle.

El Teorema 1.1 también se verifica para todos estos tipos de límites, ya sean laterales, infinitos, en el infinito, etc.

El Teorema 1.3 también es cierto si x tiende a x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$.

Observación. Por un entorno de ∞ entendemos un intervalo de la forma (M, ∞), para algún número real M. Por un entorno de $-\infty$ entendemos un intervalo de la forma $(-\infty, M)$, para algún número real M. Por un entorno reducido de x_0^+ entendemos un intervalo de la forma $(x_0, x_0 + \delta)$, para algún $\delta > 0$. Por un entorno reducido de x_0^- entendemos un intervalo de la forma $(x_0 - \delta, x_0)$, para algún $\delta > 0$. Un entorno reducido de $\pm\infty$ será lo mismo que simplemente un entorno de $\pm\infty$.

Con estas convenciones, podemos dar la siguiente definición general.

Definición 1.9. *Decimos que*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

si para todo entorno U de β existe un existe un entorno reducido V de α tal que

$$x \in V \implies f(x) \in U.$$

Aquí α, β pueden significar s, s^+, s^-, donde s es finito, ó bien $+\infty$ o $-\infty$.

El Teorema 1.4 también es cierto si el valor de los límites es ∞ ó $-\infty$.

El Teorema 1.2 es también válido cuando alguno o ambos de los límites de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos, si damos sentido a las operaciones aritméticas con infinitos de la siguiente manera (a denota siempre un número real)

$$\begin{aligned}
a+\infty &= \infty\,, & a-\infty &= -\infty\,,\\
\infty+\infty &= \infty\,, & -\infty-\infty &= -\infty\,,\\
(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) &= +\infty\,, & (-\infty)\cdot(+\infty) &= -\infty\,,\\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0\,, & &\\
\infty^a = \infty\,, &\ \text{ si }\ a>0\,, & \infty^a = 0\,, &\ \text{ si }\ a<0\,,\\
\infty^\infty &= \infty\,, & \infty^{-\infty} &= 0\,,\\
a^{+\infty} = +\infty\,, &\ \text{ si }\ a>1\,, & a^{+\infty} = 0\,, &\ \text{ si }\ 0\le a<1\,,\\
0^a = 0\,, &\ \text{ si }\ a>0\,, & &\\
\log_a 0 = -\infty\,, &\ \text{ si }\ a>1\,, & \log_a 0 = \infty\,, &\ \text{ si }\ 0<a<1\,,\\
\log_a \infty = \infty\,, &\ \text{ si }\ a>1\,, & \log_a \infty = -\infty\,, &\ \text{ si }\ 0<a<1\,.
\end{aligned}$$

Existen expresiones a las que no se asigna un valor, ya que el resultado puede ser distinto en cada caso. A estas expresiones las llamamos indeterminaciones, y las más importantes son las siguientes:

$$\infty-\infty\,,\ \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,,\ \ \frac{0}{0}\,,\ \ 0\cdot\infty\,,\ \ \infty^0\,,\ \ 0^0\,,\ \ 1^{+\infty}\,,\ \ 1^{-\infty}\,.$$

Por ejemplo, si $f_1(x) = x, f_2(x) = x+1$ y $g(x) = -x$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, pero $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)+g(x) = 1 \neq \lim_{x\to+\infty} f_1(x)+g(x)$, lo que nos dice que $(+\infty)+(-\infty)$ es una indeterminación.

El Teorema 1.2 se verifica para todos tipos de límites, ya sean laterales, infinitos, en el infinito, etc.

Teorema 1.5. *Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = A$, entonces*

$$\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = \lim_{x\to\infty} g(x) = A\,,$$

donde α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$, y A puede ser un número real, $+\infty$ ó $-\infty$.

Observación. Un resultado similar es cierto cambiando $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ por $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ por $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. El caso en que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ es finito es muy importante, y se trata con el Teorema 2.4.

A veces se utilizan también las reglas

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{a}{+0} = +\infty\,,\ \text{ si }\ a>0, &&(2)\quad \frac{a}{-0} = -\infty\,,\ \text{ si }\ a<0;\\
&(3)\quad \frac{a}{+0} = -\infty\,,\ \text{ si }\ a<0, &&(4)\quad \frac{a}{-0} = +\infty\,,\ \text{ si }\ a<0.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, la regla (2) significa lo siguiente:

Supongamos que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, donde $a>0$ y g *es negativa en un entorno reducido de* α. Entonces existe el límite $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$. Aquí α pueden significar s, s^+, s^-, donde s es finito, ó bien $+\infty$ o $-\infty$.

Teorema 1.6. *Si* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = L$ *y* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* x *en un entorno reducido de* α*, entonces:*

(1) *Si* $L = \infty$*, se tiene* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

(2) *Si* $L < \infty$*, y existe el límite* $\lim_{x\to\alpha} f(x)$*, se tiene*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \geq \lim_{x\to\alpha} g(x)\,.$$

Aquí α *puede ser* x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ *ó* $-\infty$, *y* L *puede ser un número real,* ∞ *ó* $-\infty$.

Observación. Similarmente, si $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo x en un entorno reducido de α, entonces se tiene $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.

Teorema 1.7 (comparación de órdenes de infinito)**.** *Sean* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *y* $a > 1$ *unas constantes. Entonces*

(1) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0$;

(2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{a^x} = 0$;

(3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\log x)^\alpha}{a^x} = 0$.

Ejemplo: Calcular el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2^x + 3^{x+2} + \log x}{x^2 + 3^x}.$$

Es un límite del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Para resolverlo, dividimos el numerador y el denomimador entre el término que crece más rápido, es decir, 3^x y aplicamos el teorema anterior:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2^x + 3^{x+2} + \log x}{x^2 + 3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{3^x} + \frac{2^x}{3^x} + \frac{3^{x+2}}{3^x} + \frac{\log x}{3^x}}{\frac{x^2}{3^x} + 1} = \frac{0+0+9+0}{0+1} = 9.$$

La penúltima igualdad está justificada porque después de pasar a los límites arriba y abajo, las operaciones aritméticas tienen sentido (están definidos $0{+}0{+}9{+}0$, $0{+}1$ y $\frac{0+0+9+0}{0+1}$). Si después de pasar al límite, obtuviéramos, por ejemplo, $\frac{0\cdot(+\infty-(+\infty))}{2+3}$, no podríamos deducir que el límite existe y cuál es su valor, porque $+\infty - (+\infty)$ no está definido, es decir, es una indeterminación.

2. Continuidad

Definición 2.1. *Decimos que una función* f *es* *continua* *en el punto* x_0 *si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*. Es decir,* f *es continua en* x_0 *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *si* $|x - x_0| < \delta$*. Decimos que* f *es* *discontinua* *en el punto* x_0 *si no es continua en dicho punto.*

Un *conjunto abierto* *es una unión (finita o infinita) de intervalos abiertos.*

Decimos que f *es* *continua* *en un conjunto abierto si es continua en todos los puntos de dicho conjunto.*

Definición 2.2. *Si el límite* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existe y es finito,* f *está definida en* x_0*, pero no es continua en este punto, decimos que* f *tiene una* *discontinuidad evitable* *en* x_0*.*

Teorema 2.1. *Si* f *tiene una discontinuidad evitable en* x_0*, la función* g *definida como*

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\,, & si\ x \neq x_0\,, \\ \lim_{x\to x_0} f(x)\,, & si\ x = x_0\,, \end{cases}$$

es continua en x_0*.*

Teorema 2.2. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en x_0, entonces:*

(1) *$f(x)+g(x)$ es continua en x_0.*

(2) *$f(x)g(x)$ es continua en x_0.*

(3) *$f(x)/g(x)$ es continua en x_0, si $g(x_0)\neq 0$.*

(4) *$(f(x))^{g(x)}$ es continua en x_0, si $(f(x))^{g(x)}$ está definida en un entorno del punto x_0.*

Teorema 2.3. *Si $f(x)$ es continua en x_0 y $g(x)$ es continua en $f(x_0)$, entonces la composición $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ es continua en x_0.*

Teorema 2.4. *Si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=l$ y $g(x)$ es una función continua en l, entonces $\lim_{x\to\alpha} g(f(x))=g(l)$. Aquí α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$.*

Este resultado dice algo similar al Teorema 1.5, con la diferencia de que aquí el límite l es finito.

Recordemos que al estudiar continuidad de funciones estamos calculando de nuevo límites y que el límite de una función en un punto sólo depende de cómo es la función alrededor de ese punto. Consecuentemente, si $f=g$ en un conjunto abierto U, entonces f es continua en U si y sólo si g es continua en dicho conjunto.

Definición 2.3. *Decimos que f es continua por la derecha en x_0 si $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$. Decimos que f es continua por la izquierda en x_0 si $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.*

De acuerdo con esto, una función, definida en un entorno de x_0, es continua en x_0 si y sólo si es continua por la derecha y por la izquierda en x_0.

Definición 2.4. *Decimos que f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ si es continua en (a,b), es continua por la derecha en a y es continua por la izquierda en b.*

2.1. Funciones continuas sobre intervalos cerrados

Teorema 2.5. (*Teorema de Bolzano.*) *Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, $f(a)<0$ y $f(b)>0$, entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.*

Teorema 2.6. (*Teorema de los valores intermedios.*) *Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, y $f(a)<f(b)$, entonces para cada $y\in\mathbb{R}$ que verifique $f(a)<y<f(b)$, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=y$.*

Definición 2.5. *Sea f una función y sea A un subconjunto A de $\mathcal{D}(f)$.*

Si existe un $c\in A$ tal que $f(x)\leq f(c)$ para todo $x\in A$, decimos que $f(c)$ es el valor máximo de f en A y que c es un punto máximo de f en A.

Si existe un $c\in A$ tal que $f(x)\geq f(c)$ para todo $x\in A$, decimos que $f(c)$ es el valor mínimo y que c es un punto mínimo de f en A.

Teorema 2.7. *Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces existen los valores máximo y mínimo de $f(x)$ en $[a,b]$.*

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces podemos definir

$$m=\min_{x\in[a,b]} f(x),\quad M=\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Por el Teorema 2.6 de los valores intermedios, concluimos que la imagen $f([a.b])$ de $[a,b]$ por f coincide con el intervalo cerrado $[m,M]$.

3. Derivadas

Definición 3.1. *Se define la* <u>*derivada*</u> *de f en el punto x_0 como el límite*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ .$$

La segunda expresión se obtiene de la primera poniendo $h = x - x_0$. Decimos que una función f es <u>*derivable*</u> *en el punto x_0 si su derivada en x_0 existe y es finita. Decimos que f es* <u>*derivable*</u> *en un conjunto abierto si es derivable en todos los puntos de dicho conjunto.*

Definición 3.2. *Si f es una función derivable en el punto x_0, la* <u>*recta tangente*</u> *a la gráfica de la función f en el punto x_0 es $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.*

Teorema 3.1. *Si f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.*

El Teorema 3.1 es equivalente al siguiente resultado, que es el que suele utilizarse habitualmente: <u>si f no es continua en x_0, entonces no es derivable en x_0</u>.

Teorema 3.2. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en x_0 y c es una constante, entonces:*

(1) *$f(x) + g(x)$ es derivable en x_0, y $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

(2) *$cf(x)$ es derivable en x_0, y $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.*

(3) *$f(x)g(x)$ es derivable en x_0, y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*

(4) *Si $g(x_0) \neq 0$, $f(x)/g(x)$ es derivable en x_0, y su derivada es*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \ .$$

Teorema 3.3. (<u>*Regla de la cadena.*</u>) *Si $f(x)$ es derivable en x_0 y $g(x)$ es derivable en $f(x_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es derivable en x_0 y $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Definición 3.3. *Se define la* <u>*derivada por la derecha*</u> *de f en x_0 como el límite*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ .$$

Decimos que f es <u>*derivable por la derecha*</u> *en x_0 si la derivada por la derecha en x_0 existe y es finita. Se define la* <u>*derivada por la izquierda*</u> *de f en x_0 como el límite*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ .$$

Decimos que f es <u>*derivable por la izquierda*</u> *en x_0 si la derivada por la izquierda en x_0 existe y es finita. $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ también se denominan* <u>*derivadas laterales*</u>*.*

Ejemplos: **(1)** La función $f(x) = |x|$ es derivable en 0 por la izquierda y por la derecha, y $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. Como estos valores no coinciden, esta función no es derivable en 0.

(2) La función $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ no es derivable en -1 por la derecha, porque el valor de $g'_-(-1)$ es infinito: $g'_-(-1) = +\infty$.

(3) Si ponemos $u(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, $x \in [-1, 1]$, entonces $u'_+(-1) = u'_-(1) = +\infty$, con lo cual u no es no es derivable en -1 por la derecha ni tampoco es derivable en $+1$ por la izquierda.

Definición 3.4. *Si f es una función derivable en un intervalo I, la función derivada f' de f es la función que a cada punto $x \in I$ le hace corresponder $f'(x)$, la derivada de f en el punto x. Si x es un extremo izquierdo o derecho del intervalo I, entendemos $f'(x)$ como la correspondeiente derivada lateral (que se supone finita en este caso).*

Teorema 3.4. *Si f está definida en un intervalo I y es continua e inyectiva en I, entonces f^{-1} es continua en el intervalo $f(I)$. Consecuentemente, si f es continua e inyectiva en un entorno del punto x_0, entonces f^{-1} es continua en un entorno de $f(x_0)$.*

Teorema 3.5. (*Teorema de la función inversa.*) *Si f es continua e inyectiva en (a,b), derivable en $x_0 \in (a,b)$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\,, \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$$

Al hallar derivadas de funciones estamos calculando límites; como el valor del límite depende sólo de los valores próximos al punto considerado, si dos funciones coinciden en un conjunto abierto, entonces sus derivadas son iguales en dicho conjunto.

Definición 3.5. *Sea f una función definida en un conjunto A. El punto $x_0 \in A$ es un punto máximo local (respectivamente punto mínimo local) de f en A si $\exists\,\delta > 0$ tal que x_0 es un punto máximo (respectivamente punto mínimo) de f en $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Estos puntos se denominan también punto máximo relativo de f en A y punto mínimo relativo de f en A. A los puntos máximos y mínimos de una función se les llama extremos de la función, que pueden ser extremos absolutos o extremos relativos o locales. A partir de la definición es evidente que si un punto es un extremo absoluto entonces es también un extremo local, mientras que al revés no es cierto.

Teorema 3.6. *Si f es derivable en x_0, y x_0 es un punto máximo o mínimo local de f en un intervalo abierto (a,b), entonces $f'(x_0) = 0$.*

Definición 3.6. *x es un punto singular o punto crítico de f si $f'(x) = 0$.*

Los extremos absolutos o locales de una función f continua en un intervalo $[a,b]$ se encuentran necesariamente en algunos de los siguientes conjuntos de puntos:

1. Los puntos singulares de f en (a,b).
2. Los extremos a y b.
3. Los puntos $x \in (a,b)$ tales que f no es derivable en x.

Teorema 3.7. (*Teorema del valor medio (de Lagrange).*) *Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Ver `https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_medio`

Teorema 3.8. (*Teorema del valor medio de Cauchy.*) *Si f, g son continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) y $g'(x) \neq 0$ en (a,b), entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Ver https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_medio_de_Cauchy

Teorema 3.9. (1) *Si f está definida en un intervalo abierto I y $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante en I.*

(2) *Si f y g están definidas en un intervalo abierto I y $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, entonces existe una constante c tal que $f = g + c$ en I.*

De acuerdo con esto, una función es derivable en x_0 si y sólo si es derivable por la derecha y por la izquierda en x_0 y las dos derivadas laterales coinciden.

Teorema 3.10. (1) *Si $f(x)$ es continua por la derecha en x_0 y existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$, entonces existe la derivada por la derecha de f en x_0 y $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$.*

(2) *Si $f(x)$ es continua por la izquierda en x_0 y existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$, entonces existe la derivada por la izquierda de f en x_0 y $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$.*

(3) *Si $f(x)$ es continua en x_0 y existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, entonces existe la derivada de f en x_0 y $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.*

El Teorema 3.10 es cierto aunque los límites sean ∞ ó $-\infty$ (se pide que los límites existan, pero no que sean finitos).

Teorema 3.11. *Si $f(x)$ es continua en x_0 y el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe y es finito, entonces $f'(x)$ es continua en x_0.*

Teorema 3.12. (*Regla de Bernouilli-l'Hôpital.*) *Si se verifica una de las dos hipótesis siguientes:*

(*a*) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$,

(*b*) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \infty$,

entonces

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

si existe el límite $\lim\limits_{x \to \alpha} f'(x)/g'(x)$. Aquí α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ó $-\infty$.

4. Representaciones gráficas

Definición 4.1. *f es creciente en un intervalo I si $f(a) \leq f(b)$ para todos los puntos $a, b \in I$ con $a \leq b$. f es decreciente en un intervalo I si $f(a) \geq f(b)$ para a y b como antes.*

Dicho de otra manera, una función creciente conserva las desigualdades y una función decreciente las invierte.

Teorema 4.1. *Si f es una función derivable en un intervalo I, entonces $f' \geq 0$ en I si y sólo si f es creciente en I, y $f' \leq 0$ en I si y sólo si f es decreciente en I.*

Definición 4.2. *f es estrictamente creciente en un intervalo I si $f(a) < f(b)$ para todos los puntos $a, b \in I$ con $a < b$. f es estrictamente decreciente en un intervalo I si $f(a) > f(b)$ para a y b como antes.*

Equivalentemente, f es estrictamente creciente si preserva las desigualdades estrictas, y es estrictamente decreciente si las invierte. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *Sea f derivable en un intervalo I. Si $f' > 0$ en I, entonces f es estrictamente creciente en I. Si $f' < 0$ en I, entonces f es estrictamente decreciente en I.*

El recíproco de este teorema es falso. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente y sin embargo $f'(0) = 0$.

Teorema 4.3. *Sea f una función derivable en un entorno del punto x_0, con $f'(x_0) = 0$.*

i) Si $f' > 0$ en un intervalo $(x_0 - \delta_1, x_0)$ y $f' < 0$ en $(x_0, x_0 + \delta_2)$, para ciertos $\delta_1, \delta_2 > 0$, entonces x_0 es un punto máximo local.

ii) Si $f' < 0$ en un intervalo $(x_0 - \delta_1, x_0)$ y $f' > 0$ en $(x_0, x_0 + \delta_2)$, para ciertos $\delta_1, \delta_2 > 0$, entonces x_0 es un punto mínimo local.

iii) Si f' tiene el mismo signo en los intervalos $(x_0 - \delta_1, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta_2)$, para ciertos $\delta_1, \delta_2 > 0$, entonces x_0 no es un punto máximo ni un punto mínimo local; f tiene un punto de inflexión en x_0 (ver Definición 4.4).

Teorema 4.4. *Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x_0. Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x_0.*

Este teorema tiene el siguiente recíproco parcial:

Teorema 4.5. *Si x_0 es un punto mínimo local de f y existe $f''(x_0)$, entonces $f''(x_0) \geq 0$. Si x_0 es un punto máximo local de f y existe $f''(x_0)$, entonces $f''(x_0) \leq 0$.*

Por último, vamos a caracterizar la curvatura:

Definición 4.3. *Una función f es convexa en un intervalo $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ si el segmento que une dos puntos cualesquiera de su gráfica queda por encima de la gráfica en las abscisas comprendidas entre las de esos dos puntos. Decimos que f es cóncava en I si la cuerda queda por debajo de la gráfica para esas abscisas.*

Teorema 4.6. *Si $f'' > 0$ en un intervalo, entonces f es convexa en ese intervalo. Si $f'' < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava en ese intervalo.*

Teorema 4.7. *Sea f dos veces derivable en un intervalo I. Si f es convexa en I, entonces $f'' \geq 0$ en I. Similarmente, si f es cóncava en I, entonces $f'' \leq 0$ en I.*

Definición 4.4. *Los puntos x_0 tales que f tiene distinta curvatura en un entorno a su derecha de la que tiene en un entorno a su izquierda se llaman puntos de inflexión.*

Es decir, los puntos de inflexión son puntos en que la función pasa de cóncava a convexa o viceversa. Los puntos de inflexión pueden estar donde $f''(x) = 0$ o donde no existe $f''(x)$. Si existe f'' a la izquierda y a la derecha de x_0 y los signos de f'' a uno y otro lado son distintos, entonces x_0 es un punto de inflexión. Si x_0 es un punto de inflexión y existe $f'(x_0)$, entonces la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ cruza la gráfica de f en ese punto.

Definición 4.5. *Una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para todo x de su dominio; es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x de su dominio.*

Definición 4.6. *Una función f es periódica de periodo k si $f(x + k) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.*

Es fácil comprobar que si k es un periodo para f, entonces también lo son $-k$, $2k$, $-2k$ y, en general, lo es nk para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que k es el periodo mínimo de f si $k > 0$ y no existe ningún otro periodo T de f con $0 < T < k$.

Para representar una función necesitamos conocer en primer lugar su dominio, sus simetrías y su continuidad. En una función par la gráfica es simétrica respecto del eje y. En una impar la gráfica es simétrica respecto del origen y, por tanto, si $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ entonces $f(0) = 0$.

5. Polinomio de Taylor

Definición 5.1. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable en el punto $a \in [\alpha, \beta]$. El polinomio de Taylor de grado n de f en a es el único polinomio p de grado menor o igual que n tal que*

$$f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a), \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Dicho polinomio es el polinomio $P_{n,a}$ dado por

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n.$$

Teorema 5.1. *Si f es n veces derivable en a, es decir, si existe la derivada $f^{(n)}(a)$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

La función $R_{n,a}(x)$ definida mediante la igualdad

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \tag{1}$$

mide la diferencia entre el verdadero valor de la función (en general desconocido) y el valor aproximado que se obtiene al calcular el valor $P_{n,a}(x)$ del polinomio de Taylor de grado n en a. Por esta razón se suele denominar resto n-ésimo de Taylor de f en a. La fórmula (1) se conoce como fórmula de Taylor.

Teorema 5.2. *(Teorema de Taylor.) Si existe $f^{(n+1)}(t)$ para todo $t \in [a, x)$ (o alternativamente, para todo $t \in (x, a]$ si $x < a$), entonces existe un punto $\xi \in (a, x)$ tal que*

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Teorema 5.3. *Sea f tal que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

(1) *Si n es impar, entonces a es un punto de inflexión de f.*
(2) *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces a es un punto mínimo local de f.*
(3) *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces a es un punto máximo local de f.*

La siguiente lista incluye los polinomios de Taylor de las funciones más usuales. Aquí denotamos por $p_n(x; f(x); a)$ el polinomio de Taylor de la función $f(x)$ en el punto a.

$$\begin{aligned}
p_n(x; e^x; 0) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \\
p_{2n+1}(x; \operatorname{sen} x; 0) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
p_{2n}(x; \cos x; 0) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\
p_n(x; (1+x)^\alpha; 0) &= 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n,
\end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y el número combinatorio $\binom{\alpha}{n}$ se define mediante

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

6. Integrales indefinidas

Definición 6.1. *Sea f una función, que está definida y es continua en un intervalo I (finito o infinito).*

Decimos que la función F es una primitiva o integral indefinida de la función f (en I), y lo denotamos por

$$\int f(x)\,dx = F(x)\,,$$

si se verifica $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. La función $f(x)$ se denomina integrando.

Al hablar de F decimos que es "una"primitiva de f, porque en realidad hay infinitas primitivas: si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ también es una primitiva de f, para cualquier constante c, ya que se tiene $(F + c)' = F' + c' = F' = f$. Puede demostrarse que así se obtienen todas las primitivas de una función f definida en un intervalo I, es decir, que si $F' = f$ y $G' = f$ en I, entonces existe una constante c tal que $F = G + c$ en I. Por tanto, en lugar de escribir $\int f(x)\,dx = F(x)$, habitualmente se escribe $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, que es la expresión que da todas las primitivas de f. La constante c se denomina constante de integración.

Teorema 6.1. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones y k es una constante, entonces:*

(1) $\displaystyle\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

6.1. Integrales racionales

Definición 6.2. *Decimos que una función es una función racional, y la denotaremos por $R(x)$, si es cociente de dos polinomios, es decir, si*

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,,$$

con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$.

El procedimiento para integrar funciones racionales consiste en seguir estas simples reglas:

1. Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador (si $n \geq m$), hay que dividir el numerador entre el denominador. Si $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el resto de esta división, se tiene $N(x) = C(x)D(x) + R(x)$, y si dividimos por $D(x)$, resulta

$$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\,.$$

Al ser $C(x)$ un polinomio, es fácil de integrar, y por tanto, este primer paso sirve para transformar la integral de una función racional en la integral de una función racional cuyo numerador tiene grado menor que el denominador.

Si ya se tiene directamente $n < m$, no hay que hacer nada en este paso 1.

2. Comprobar si la función es una integral inmediata, es decir, si se puede utilizar la fórmula $\int u'/u\,dx = \log|u| + c$, ó $\int u'u^\alpha\,dx = u^{\alpha+1}/(\alpha+1) + c$, ó $\int u'/(u^2 + a)\,dx = a^{-1/2}\arctan(u/\sqrt{a}\,) + c$. Si no se puede usar ninguna de estas tres fórmulas, se pasa al punto siguiente.

3. Descomponer en fracciones simples. En este tercer paso lo que se pretende es transformar la función, de forma que con la nueva expresión sea una integral elemental. De hecho, la función se escribe como suma de funciones a las que se puede aplicar alguna de las tres fórmulas del paso 2. Este método es, en cierta medida, el inverso de la suma de fracciones.

6.2. Integrales por partes

Teorema 6.2. (*Integración por partes.*) *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\,.$$

Si $u(x)$ es una función derivable se define su diferencial como $du = u'(x)\,dx$. Usando esta notación, con $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la regla de integración por partes se escribe de la siguiente manera, que resulta más fácil de recordar:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du\,.$$

Existen casos en los que el uso de la integración por partes es altamente recomendable, pues transforma la integral en otra más simple.

A. Si $p(x)$ es un polinomio y $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, conviene integrar por partes en las siguientes integrales, haciendo $u = p(x)$:

$$\int p(x)\,e^{ax+b}\,dx\,, \qquad \int p(x)\,(ax+b)^{\alpha}\,dx\,,$$
$$\int p(x)\,\operatorname{sen}(ax+b)\,dx\,, \qquad \int p(x)\,\cos(ax+b)\,dx\,.$$

Si α es racional, la integral $\int p(x)\,(ax+b)^{\alpha}\,dx$ se calcula también utilizando el cambio de variables del apartado B. de la siguiente sección.

B. Si $p(x)$ es un polinomio y $a, b \in \mathbb{R}$, conviene integrar por partes en las siguientes integrales, haciendo $dv = p(x)\,dx$:

$$\int p(x)\,\log(ax+b)\,dx\,, \qquad \int p(x)\,\operatorname{arc\,sen}(ax+b)\,dx\,,$$
$$\int p(x)\,\operatorname{arc\,cos}(ax+b)\,dx\,, \qquad \int p(x)\,\arctan(ax+b)\,dx\,.$$

6.3. Cambio de variable

Teorema 6.3. (*Cambio de variable.*) *Si f es continua y g es derivable, entonces*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

A continuación vamos a ver unas clases de funciones para las que se conocen cambios de variable que suelen simplificar considerablemente las integrales.

A. Para calcular la integral de una función en la que aparece e^x, se puede hacer el cambio de variable $t = e^x$, ya que entonces $x = \log t$ y $dx = dt/t$.

B. Para calcular la integral de una función en $x, (a+bx)^{1/p_1}, (a+bx)^{1/p_2}, \ldots, (a+bx)^{1/p_m}$, con $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$, se puede hacer el cambio de variable $a + bx = t^n$, con $n = m.c.m.(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ (el mínimo común múltiplo de $p_1, p_2, \ldots, p_m$), ya que entonces $(a+bx)^{1/p_j} = t^{n/p_j}$ y $n/p_j \in \mathbb{N}$.

C. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{a - b(x-\alpha)^2}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\operatorname{sen} t = \sqrt{b}\,(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{a - b(x-\alpha)^2} = \sqrt{a}\cos t$ y $dx = \sqrt{a}\cos t\,dt/\sqrt{b}$.

D. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{a + b(x-\alpha)^2}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\tan t = \sqrt{b}\,(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{a + b(x-\alpha)^2} = \sqrt{a}\sec t$ y $dx = \sqrt{a}\sec^2 t\,dt/\sqrt{b}$.

E. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{b(x-\alpha)^2-a}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\sec t = \sqrt{b}\,(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{b(x-\alpha)^2-a} = \sqrt{a}\tan t$ y $dx = \sqrt{a}\sec t \tan t\, dt/\sqrt{b}$.

F. Para calcular la integral de una función en la que aparece alguna de las raíces de los tres apartados anteriores, se puede hacer el cambio de variable t igual a la raíz, si aparece $(x-\alpha)^n$, con n impar, multiplicando (o dividiendo) en el integrando. Si n es impar, este cambio es mucho más conveniente que cualquiera de los indicados en los apartados C, D y E.

6.4. Integrales trigonométricas

Veamos cómo se calculan las integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx\,, \qquad n, m \in \mathbb{N}\,.$$

A. Si m es impar, da buen resultado utilizar el cambio de variable $t = \cos x$.

B. Si n es impar, da buen resultado utilizar el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$.

C. Si n y m son ambos pares, en lugar de utilizar cambios de variable, conviene usar las fórmulas del coseno del ángulo doble:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,, \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,.$$

Veamos ahora cómo se calculan las integrales racionales en seno y coseno: $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$. En primer lugar conviene destacar que cualquier función racional en las razones trigonométricas puede expresarse como una función racional en seno y coseno.

A. Si la función es impar en seno, es decir, si

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

da buen resultado utilizar el cambio de variable $t = \cos x$.

B. Si la función es impar en coseno, es decir, si

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

da buen resultado utilizar el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$.

C. Si la función es par simultáneamente en seno y coseno, es decir, si

$$R(-\operatorname{sen}\, x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

da buen resultado utilizar el cambio de variable $t = \tan x$.

D. Si no estamos en ninguno de los tres casos anteriores, se puede aplicar el "cambio universal" $t = \tan(x/2)$. Con este cambio resulta

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\,.$$

Se puede consultar los diversos métodos de integración en:
`http://www.inetor.com/metodos/metodos_integracion.html`

7. Integrales definidas

Dado un intervalo $I = [a, b]$, denotamos por $|I|$ la longitud de este intervalo.

Definición 7.1. *Sea f es una función un intervalo $[a, b]$. Vamos a decir que f es admisible si f está acotada en $[a, b]$ y continua en este intervalo, salvo en un número finito de puntos.*

Definición 7.2. *Dada una función f admisible en un intervalo $[a,b]$, definimos* la subgráfica *$\Gamma^+(f,[a,b])$ de f y la* la supergráfica *$\Gamma^-(f,[a,b])$ de f como*

$$\begin{aligned}\Gamma^+(f,[a,b]) &= \{(x,y):\ x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x))\}\,,\\ \Gamma^-(f,[a,b]) &= \{(x,y):\ x\in[a,b],\ f(x)\le y\le 0)\}\,.\end{aligned}$$

La integral definida de f sobre $[a,b]$ se define como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{Area}(\Gamma^+(f,[a,b])) - \mathrm{Area}(\Gamma^-(f,[a,b])).$$

Aquí está una fórmula computacional para la integral definida:

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+k\,\frac{b-a}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+k\,\frac{b-a}{n}\Big)\,. \qquad (*)$$

En particular, si $[a,b]=[0,1]$, obtenemos:

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\,.$$

Más en general, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 7.1. *si para todo n, dividimos el intervalo $I=[a,b]$ en subintervalos $I_1^n, I_2^n,\ldots,I_n^n$, de forma que el máximo de sus longitudes tiende a 0 cuando n tiende al infinito, y elegimos de forma arbitraria puntos $x_k^n\in I_k^n$, entonces las cantidades*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^n)|I_k^n|$$

se aproximan a $\int_a^b f$ cuando n tiende a infinito.

Si para cada n, el intervalo I se divide en n partes iguales y los puntos x_k^n son los extremos izquierdos de los subintervalos I_k^n, recuperamos la segunda fórmula en (*). Este teorema va a ser una motivación para introducir la integral definida de una función de varias variables.

Teorema 7.2. *Si f,g son funciones admisibles en $[a,b]$ y $c\in\mathbb{R}$, entonces $f+g, cf, |f|, fg$ son admisibles, y*

(1) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,,$

(2) $\int_a^b cf = c\int_a^b f\,,$

(3) $\int_a^b |f| \ge \Big|\int_a^b f\Big|\,,$

(4) $\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \le \Big(\int_a^b f^2\Big)\Big(\int_a^b g^2\Big)\,.$

Observación. La propiedad (4) se denomina desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Teorema 7.3. *Sean $a<b<c$ números reales y f una función continua a trozos en un intervalo $[a,c]$. Entonces*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f\,.$$

Definición 7.3. *Si $\alpha<\beta$, se define*

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\,.$$

Con esta definición se puede generalizar el Teorema 7.3:

Teorema 7.4. *Si f es integrable en $[a, b]$, entonces es integrable en cualquier intervalo contenido en $[a, b]$. Además, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ (sin importar cómo estén ordenados) se tiene*

$$\int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f = \int_\alpha^\gamma f .$$

Teorema 7.5. (*Teorema fundamental del Cálculo.*) *Sea f una función continua en $[a, b]$. Ponemos*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{**}$$

Entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Podemos resumir que toda función continua f en un intervalo $[a, b]$ tiene antiderivada, y una de sus antiderivadas puede ser definida a partir de la fórmula (**).

Por supuesto, si la función $f(x)$ viene dada por una fórmula, la mayoría de las veces no se podrá integrar en (**) explícitamente. Es el caso de funciones $f(x)$ tales como e^{x^2}, e^{-x^2}, e^x/x, $1/\ln(x)$, etc. Por otro lado, (**) define la función $F(x)$ de forma única y permite calcularla numéricamente con la precisión que queramos. No toda función ha de estar definida por una fórmula.

Teorema 7.6. (*Regla de Barrow.*) *Sean f y g continuas en $[a, b]$ y g derivable en (a, b), tales que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ (g es una primitiva de f en (a, b)). Entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) .$$

Definición 7.4. *Si g es una función definida en el intervalo $[a, b]$ se define la expresión $[g(x)]_a^b$ como*

$$\big[g(x)\big]_a^b = g(b) - g(a) .$$

Según esto, la regla de Barrow puede escribirse

$$\int_a^b f = \big[g(x)\big]_a^b .$$

Teorema 7.7. *Si f es integrable en $[a, b]$ y $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$m(b - a) \le \int_a^b f \le M(b - a) .$$

Como consecuencia inmediata del Teorema 7.7 se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 7.8. *Sean f, g funciones integrables en $[a, b]$.*

(*i*) *Si $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \ge 0$.*

(*ii*) *Si $f(x) \ge g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.*

Teorema 7.9. *Sea f integrable en $[a, b]$ con $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$. Si existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que f es continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces $\int_a^b f > 0$.*

Teorema 7.10. *Si f es integrable en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ para todo $x \in [a, b]$, entonces F es continua en $[a, b]$.*

Teorema 7.11. (*Integración por partes en integrales definidas.*) *Si f' y g' son funciones continuas en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,.$$

Teorema 7.12. (*Cambio de variable.*) *Sea g una función tal que g' es continua en $[a,b]$ y sea f continua en $g([a,b])$ (la imagen del intervalo $[a,b]$ por la función g). Entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt\,.$$

Teorema 7.13. (*i*) *Si f es una función impar e integrable en $[-a,a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f = 0$.*

(*ii*) *Si f es una función par e integrable en $[-a,a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.*

Teorema 7.14 (*no entra en el curso*)**.** *Si f es continua en $[a,b]$ y g y h son derivables en $[\alpha,\beta]$ y con valores en $[a,b]$, entonces la función*

$$A(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

es derivable en $[\alpha,\beta]$ y su derivada es $A'(x) = f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))\cdot g'(x)$.

7.1. Cálculo de áreas, volúmenes y longitudes

Como ya se ha visto, el área comprendida entre la gráfica de una función continua positiva f, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Si f no es una función positiva, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área comprendida entre la gráfica de f, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$ en la parte en la que f es positiva, menos el área comprendida entre la gráfica de f, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$ en la parte en la que f es negativa. Esto es lo que se denomina el área algebraica, que puede ser positiva, negativa o cero. Por ejemplo, $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$.

El área comprendida entre la gráfica de una función continua f no necesariamente positiva, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

El área comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas f y g y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\,.$$

Volumen de un sólido de revolución.

El volumen obtenido al girar alrededor del eje X la región $\{a \le x \le b,\ 0 \le y \le |f(x)|\}$ es

$$\pi\int_a^b f(x)^2\,dx\,.$$

Conviene observar que en esta integral no importa cuándo es f positiva o negativa, ya que se integra f^2, que es siempre positiva.

El volumen obtenido al girar alrededor del eje X la región $\{a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$, si $g(x) \ge 0$, es

$$\pi\int_a^b \big(f(x)^2 - g(x)^2\big)\,dx\,.$$

Longitud de la gráfica de una función. Como caso particular del anterior, si f es una función continuamente diferenciable a trozos en $[a, b]$, la longitud de su gráfica es

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

8. Tabla de derivadas

A continuación se exponen las derivadas de las funciones elementales (α, c y a son constantes reales, con $a > 0$, y $u = u(x)$ es una función de x):

$$(c)' = 0\,,$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\,, \qquad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'\,,$$

$$(\sqrt{x}\,)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,, \qquad (\sqrt{u}\,)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\,,$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}\,, \qquad (\log u)' = \frac{u'}{u}\,,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log a}\,, \qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u\log a}\,,$$

$$(e^x)' = e^x\,, \qquad (e^u)' = u'e^u\,,$$

$$(a^x)' = a^x\log a\,, \qquad (a^u)' = u'a^u\log a\,,$$

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x\,, \qquad (\operatorname{sen} u)' = u'\cos u\,,$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x\,, \qquad (\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u\,,$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x\,, \qquad (\tan u)' = u'\sec^2 u\,,$$

$$(\operatorname{cotan} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x\,, \qquad (\operatorname{cotan} u)' = -u'\operatorname{cosec}^2 u\,,$$

$$(\sec x)' = \sec x\tan x\,, \qquad (\sec u)' = u'\sec u\tan u\,,$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x\operatorname{cotan} x\,, \qquad (\operatorname{cosec} u)' = -u'\operatorname{cosec} u\operatorname{cotan} u\,,$$

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad (\operatorname{arc\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,,$$

$$(\operatorname{arc\,cos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad (\operatorname{arc\,cos} u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\,,$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}\,.$$

La segunda columna de derivadas se obtiene directamente de la primera aplicando la regla de la cadena.

9. Tabla de integrales

A continuación se exponen las integrales de las funciones elementales, la mayor parte de las cuales se obtienen directamente de la tabla de derivadas (en esta tabla, α es una constante real, a es una constante positiva, c es la constante de integración, y $u = u(x)$ es una función de x):

$$\int \alpha\, dx = \alpha\, x + c\,,$$

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\,, \qquad \int u'\, u^\alpha\, dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\,, \quad \alpha \neq -1\,,$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c\,, \qquad \int \frac{u'}{u}\, dx = \log|u| + c\,,$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c\,, \qquad \int u'\, e^u\, dx = e^u + c\,,$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + c\,, \qquad \int u'\, a^u\, dx = \frac{a^u}{\log a} + c\,,$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c\,, \qquad \int u' \operatorname{sen} u\, dx = -\cos u + c\,,$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c\,, \qquad \int u' \cos u\, dx = \operatorname{sen} u + c\,,$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c\,, \qquad \int u' \sec^2 u\, dx = \tan u + c\,,$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotan} x + c\,, \qquad \int u' \operatorname{cosec}^2 u\, dx = -\operatorname{cotan} u + c\,,$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c\,, \qquad \int u' \sec u \tan u\, dx = \sec u + c\,,$$

$$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c\,, \qquad \int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotan} u\, dx = -\operatorname{cosec} u + c\,,$$

$$\int \tan x\, dx = -\log|\cos x| + c\,, \qquad \int u' \tan u\, dx = -\log|\cos u| + c\,,$$

$$\int \operatorname{cotan} x\, dx = \log|\operatorname{sen} x| + c\,, \qquad \int u' \operatorname{cotan} u\, dx = \log|\operatorname{sen} u| + c\,,$$

$$\int \sec x\, dx = \log\big|\sec x + \tan x\big| + c\,, \qquad \int u' \sec u\, dx = \log\big|\sec u + \tan u\big| + c\,,$$

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\log\big|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x\big| + c\,, \qquad \int u' \operatorname{cosec} u\, dx = -\log\big|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotan} u\big| + c\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + c\,, \qquad \int \frac{u'\, dx}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + c\,,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c\,, \qquad \int \frac{u'\, dx}{u^2+1} = \arctan u + c\,,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} + c\,, \qquad \int \frac{u'\, dx}{u^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{u}{\sqrt{a}} + c\,, \quad \text{si } a > 0\,.$$

La segunda columna de primitivas se obtiene directamente de la primera aplicando un cambio de variable.