Análisis Matemático II. Apuntes.
U.A.M., Ingeniería de Telecomunicación

Elaborado en el Dpto. Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid

con modificaciones de D. Yakubovich

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
EN VARIAS VARIABLES

7 de diciembre de 2016

1. El repaso del espacio euclideo $\mathbb{R}^n$

En general identificamos cada punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ con el vector $\vec{x}$ que va desde el origen a dicho punto: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \Leftrightarrow x_i = y_i, \ \forall i = 1, \dots, n.$$

Aquí ^{T} es el símbolo de transposición. En expresiones matriciales con vectores, los entendemos siempre como **vectores columna** (aunque a veces escribiremos por comodidad $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en vez de $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$). Se define la base canónica en $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de vectores:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \ \ \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \ \ \dots, \qquad \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

PRODUCTOS ENTRE VECTORES: ESCALAR Y VECTORIAL

Producto escalar:

$$< \vec{x}, \vec{y} > = < (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) > = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

Observación 1.1 *Recordemos que* $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0, \ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Definición 1.2 *Se define la* ***longitud de un vector*** $\vec{x}$ *como su norma o módulo y se denota por*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

Proposición 1.3

$$< \vec{x}, \vec{y} > = \|\vec{x}\| \ \|\vec{y}\| \cos(\alpha).$$

Como consecuencia tenemos:

1. la desigualdad de Cauchy: $\quad \|\vec{x}\, \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| \ \|\vec{y}\|$
2. la desigualdad triangular: $\quad \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
3. $\vec{x}, \vec{y}$ son vectores ortogonales ($\vec{x} \perp \vec{y}$) si y sólo si $< \vec{x}, \vec{y} > = 0$.

Definición 1.4 *La* **distancia** *entre dos puntos $\vec{x}$, $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ es la norma de su diferencia, es decir,*

$$\operatorname{dist}(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ se puede definir como un determinante simbólico:

$$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \,, \qquad \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3\,.$$

Observación 1.5 *El vector $\vec{x}\times\vec{y}$ verifica:*

1. $\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\sin(\alpha) =$ *área del paralelogramo formado por ambos vectores*
2. *$\vec{x}\times\vec{y}$ es un vector perpendicular a cada uno de ellos en el sentido del avance del tornillo.*

La norma en $\mathbb{R}^n$ verifica propiedades similares al valor absoluto en $\mathbb{R}$:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\,, \qquad \big|\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,\big| \le \|\vec{x}-\vec{y}\|\,.$$

De hecho, la norma es igual al valor absoluto si $n = 1$.

Definición 1.6 *Una* **función** *es una regla cualquiera que hace corresponder un punto de $\mathbb{R}^m$ y sólo uno a cada punto de un cierto conjunto $A\subseteq\mathbb{R}^n$. $f(\vec{x})$ es el valor de la función f en el punto $\vec{x}$. El* **dominio** *de una función es el conjunto de puntos para los que está definida, A en este caso, y se denota por $\operatorname{Dom}(f)$. Si no se especifica nada, se sobreentiende que el dominio de una función está formado por todos los puntos para los cuales tiene sentido la definición. Habitualmente escribiremos*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

para denotar que A es el conjunto inicial o dominio y $\mathbb{R}^m$ el conjunto final, de tal manera que a cada punto de A la función f le asocia un punto de $\mathbb{R}^m$.

La **imagen** *de una función es el conjunto de los puntos y tales que existe un punto $\vec{x}$ con $f(\vec{x}) = \vec{y}$, y se denota por $\operatorname{Img}(f)$.*

La **gráfica** *de una función es el siguiente conjunto de puntos:*

$$\{(\vec{x}, f(\vec{x})) : x \in \operatorname{Dom}(f)\} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m.$$

2. Límites y continuidad

Definición 2.1 ***La bola abierta*** *$B(\vec{x}_0, r)$ de centro $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ y radio $r>0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a distancia menor que r del punto $\vec{x}_0$, es decir,*

$$B(\vec{x}_0, r) = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n :\ \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < r\right\}.$$

La bola cerrada *$\overline{B}(\vec{x}_0, r)$ de centro $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ y radio $r>0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a distancia menor o igual que r del punto $\vec{x}_0$, es decir,*

$$\overline{B}(\vec{x}_0, r) = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n :\ \|\vec{x}-\vec{x}_0\| \le r\right\}.$$

Definición 2.2 *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\vec{p}$ un punto en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\vec{p}$ es* ***un punto de acumulación de*** *A si para todo radio $\varepsilon>0$, existe un punto en $A\cap B(\vec{p},\varepsilon)$, que es distinto de $\vec{p}$.*

Ejemplos. 1) Si A es finito, entonces no tiene puntos de acumulación.

2) Si $A = B(\vec{0}, 1)$ es la bola abierta de radio 1 en $\mathbb{R}^n$, centrada en el origen, entonces sus puntos de acumulación son puntos pertenecientes a la correspondiente bola cerrada $\overline{B}(\vec{0}, 1)$.

3) Sea

$$A = \{\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 < x_1 < 2,\, 2 < x_2 < 4\}.$$

Entonces un punto $\vec{p} = (p_1, p_2)^T \in \mathbb{R}^2$ es un punto de acumulación del conjunto A si y sólo si $1 \leq p_1 \leq 2$, $2 \leq p_2 \leq 4$.

Definición 2.3 *Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$ es el* **límite** *de $f(\vec{x})$ cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$, y lo escribimos $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\| < \varepsilon$ si $x \in A$, $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$.*

Se puede ver que $\lim_{\vec{x}\to\vec{q}} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$ si y sólo si $f(\vec{x}^k) \to \vec{\ell}$ para toda sucesión de puntos $\{\vec{x}^k\}$ contenida en A tales que $\vec{x}^k \neq \vec{q}$ y $\vec{x}^k \to \vec{q}$ cuando $k \to \infty$. Esto permite extender la definición del límite en un punto q a cualquier función, definida en un conjunto A que contiene al menos una sucesión $\{x^k\}$ tal que $x^k \neq \vec{q}$ para todo k y $\lim_{k\to\infty} \vec{x}^k = \vec{q}$.

Teorema 1. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si existe el límite cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$ de $f(\vec{x})$, entonces es único. Es decir, si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}_1$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}_2$, entonces $\vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_2$.

Observación 2.4 *Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $(0,0)$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si los límites $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$ dependen de θ, entonces no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Si los límites $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$ no dependen de θ, entonces* **no se puede afirmar nada** *sobre la existencia del límite.*

Si el punto en el queremos estudiar el límite es $(x_0, y_0) \in A$, entonces se tiene un resultado similar: Si los límites $\lim_{r\to 0} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r \operatorname{sen}\theta)$ dependen de θ, entonces no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Si el punto en el queremos estudiar el límite es $(x_0, y_0) \in A$, entonces se tiene un resultado similar: Si los límites $\lim_{r\to 0} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r \operatorname{sen}\theta)$ dependen de θ, entonces no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Ejemplos. 1) $\displaystyle\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$;

2) No existe el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

3) Si $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, no existe el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} g(x,y)$, aunque el límite de esta función a lo largo de cualquier recta que pasa por el origen existe y es nulo.

Efectivamente, $\lim_{x\to 0} g(x, tx) = 0$ para toda constante $t \in \mathbb{R}$. Pero $\lim_{x\to 0} g(y^2, y) = 1/2$, luego el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} g(x,y)$

Proposición 1. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = 0$ y g está acotada en un entorno de $\vec{x}_0$, entonces $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = 0$.

Teorema 2. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si existen

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ y $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \big(cf(\vec{x})\big) = c\big(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})\big)\,.\\
&(2)\quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \big(f(\vec{x})+g(\vec{x})\big) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})\,.\\
&(3)\quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \big(f(\vec{x})g(\vec{x})\big) = \big(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})\big)\big(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})\big)\,,\quad \text{si } m=1\,.\\
&(4)\quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})}\,,\quad \text{si } m=1, \text{ y } \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) \neq 0\,.\\
&(5)\quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \big(f(\vec{x})\big)^{g(\vec{x})} = \big(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})\big)^{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})},
\end{aligned}
$$

si $m=1$ y todas las expresiones en la parte derecha tienen sentido.

Teorema 3. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$, donde $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, son las funciones componentes de f, entonces $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ si y sólo si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = l_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Definición 2.5 *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{x}_0$ un punto de A. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función.*

1) *Si $\vec{x}_0$ es un punto de acumulación de A. Se dice que f es* **continua** *en el punto $\vec{x}_0$ si $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.*

1) *Si $\vec{x}_0$* ***no*** *es un punto de acumulación de A, asumimos que f (automáticamente) es continua en $\vec{x}_0$.*

Teorema 4. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f y g son continuas en $\vec{x}_0$, entonces:

(1) $cf(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0$.
(2) $f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0$.
(3) $f(\vec{x})g(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0$, si $m = 1$.
(4) $f(\vec{x})/g(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0$, si $m = 1$ y $g(\vec{x}_0) \neq 0$.
(5) $(f(\vec{x}))^{g(\vec{x})}$ es continua en $\vec{x}_0$, si $m = 1$ y $(f(\vec{x}))^{g(\vec{x})}$ está definida en un entorno de $\vec{x}_0$.

Teorema 5. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$, donde $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, son las funciones componentes de f, entonces f es continua en $\vec{x}_0$ si y sólo si f_i es continua para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Teorema 6. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^k$, donde B es un entorno de $f(\vec{x}_0)$. Si $f(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0$ y $g(\vec{x})$ es continua en $f(\vec{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ es continua en $\vec{x}_0$.

3. La topología del espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ en relación con funciones continuas

Definición 3.1 *Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es* **abierto** *si para todo $\vec{x} \in U$ existe un $r > 0$ (que puede depender de $\vec{x}$) tal que $B(\vec{x}, r) \subseteq U$.*

Un **entorno** *de un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que contiene a $\vec{x}$.*

Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es **cerrado** *si su complemento $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto.*

La **frontera** *∂E de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ (no tienen por qué estar en E) tales que en todo entorno de $\vec{x}$ hay algún punto de E y algún punto de E^c.*

Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\partial E \subseteq E$.

El **interior** *de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el subconjunto de puntos $\vec{x}$ de E para los que existe un $r > 0$ (que puede depender de $\vec{x}$) tal que $B(\vec{x}, r) \subseteq E$. De hecho, el interior de E es el mayor subconjunto abierto de E.*

La **clausura** $\overline{E}$ *de un conjunto* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *es* $\overline{E} = E \cup \partial E$*. De hecho, la clausura de* E *es el menor conjunto cerrado que contiene a* E*.*

Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *es* **acotado** *si existe un* $r > 0$ *tal que* $E \subseteq B(\mathbf{0}, r)$*.*

Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *es* **compacto** *si es cerrado y acotado.*

Es fácil ver que una bola abierta es un conjunto abierto y que una bola cerrada es un conjunto compacto. También es fácil ver que la unión e intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto, y que la unión e intersección de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si M no contiene ni un sólo punto de su frontera.

Teorema 1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si A es compacto y f es continua en A, entonces f está acotada en A.

Teorema 2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si A es compacto y f es continua en A, entonces existen los valores máximo y mínimo de f en A.

4. Diferenciación

Definición 4.1 *Sean* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$*. Entonces la* **derivada parcial** $\partial f/\partial x_j$ *de* f *con respecto a la variable* x_j *se define como*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\vec{x})}{h} \ ,$$

donde $1 \le j \le n$ *y* $\mathbf{e}_j$ *es el* j*-ésimo vector de la base canónica; es decir, la derivada parcial de* f *con respecto a la variable* x_j *es simplemente la derivada "usual"de* f *con respecto a la variable* x_j*, si se supone que el resto de las variables son constantes.*

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, entonces* $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$*, y podemos hablar de la derivada parcial* $\partial f_i/\partial x_j$ *de la componente i-ésima de* f *con respecto a la variable* x_j*.*

Ejemplos 4.2 ***1)*** *Sea* $f(x, y, z) = z^3 \operatorname{sen}(x + 2y) + x^2 z$*. Entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z^3 \cos(x+2y)+2xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2z^3 \cos(x+2y), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 \operatorname{sen}(x+2y)+x^2.$$

2) *Sea* $F(x, y) = \left(x^{-1} \log(y), e^{3x^2 y}\right)^T$*. Entonces*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -x^{-2} \log(y), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 6xy\, e^{3x^2y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{xy}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 3x^2\, e^{3x^2y}.$$

Definición 4.3 *Sean* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *un conjunto abierto,* $(x_0, y_0) \in U$ *y* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$*. Decimos que* f *es* **diferenciable** *en* (x_0, y_0) *si* $\partial f/\partial x$ *y* $\partial f/\partial y$ *existen en* (x_0, y_0) *y si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0\,.$$

En este caso se define el **plano tangente** *a la gráfica de* f *en el punto* (x_0, y_0) *como*

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\,.$$

Recordatorio. Dado un punto $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y un vector normal $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$, el plano P en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\vec{p}_0$ y tiene la normal $\vec{n}$ es

$$\begin{aligned} P &= \{\vec{p} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \langle \vec{p} - \vec{p}_0, \vec{n} \rangle = 0\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x-x_0)A + (y-y_0)B + (z-z_0)C = 0\right\}. \end{aligned}$$

De aquíse ve que el plano tangente a la gráfica de f es el plano que pasa por el punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$, que corresponde al punto (x_0, y_0) del plano xy y cuyo vector normal es

$$\vec{n} = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \Big) .$$

Es decir, $\vec{n}$ es ortogonal a la gráfica en el punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

La definición de una función diferenciable de n variables es parecida a la anterior.

Definición 4.4 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es* **diferenciable** *en $\vec{p}$ si existen las derivadas parciales $\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \ldots, \partial f/\partial x_n$ en $\vec{q}_0$ y si*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{q}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{q}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{q})(x_1 - p_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{q})(x_1 - p_2) - \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{q})(x_n - p_n)}{\|\vec{x} - \vec{q}\|} = 0 .$$

Definición 4.5 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U.* ***El gradiente*** *de f en $\vec{x} \in U$ se define de la siguiente forma:*

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} .$$

Teorema 1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$, entonces f es continua en $\vec{x}_0$.

Observación. Puede ocurrir que existan las derivadas parciales de una función en $\vec{x}_0$, y que la función no sea continua en $\vec{x}_0$. Esto demuestra que la definición que hemos dado de función diferenciable es la "correcta".

Teorema 2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existen todas las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ de f y son continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\vec{x}_0$.

Definición 4.6 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. La* **derivada direccional** *de f en $\vec{x}_0$ a lo largo del vector $\vec{v}$ se define como*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t\vec{v})\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t} .$$

Habitualmente se elige el vector $\vec{v}$ unitario (con norma 1). En este caso se habla de la **derivada direccional de f en $\vec{x}_0$ en la dirección** *$\vec{v}$, y representa* ***la tasa de cambio (pendiente) de la función en la dirección de dicho vector****.*

Este concepto generaliza a las derivadas parciales, ya que estas son derivadas direccionales en los vectores paralelos a los ejes.

Teorema 5. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces existen todas las derivadas direccionales de f en $\vec{x}_0$.

Calculando el máximo y el mínimo de la expresión $\langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle$ sobre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma uno, obtenemos la siguiente importante caracterización del gradiente de f:

Corolario. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ y $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\vec{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\vec{x}_0$ de f es máxima y $-\nabla f(\vec{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\vec{x}_0$ de f es mínima (f crece más rápidamente desde $\vec{x}_0$ en la dirección $\nabla f(\vec{x}_0)$, y decrece más rápidamente en la dirección $-\nabla f(\vec{x}_0)$).

Definición 4.7 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Dado un número real c, el* ***conjunto de nivel de valor*** *c es el conjunto de puntos $\vec{x} \in A$ para los cuales $f(\vec{x})$ es constante, es decir, el conjunto*

$$\gamma_c \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} \in A : f(\vec{x}) = c\} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Si $n = 2$, hablamos de **curva de nivel de valor** *c, y si $n = 3$, hablamos de* **superficie de nivel de valor** *c.*

Teorema 6. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ y $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\vec{x}_0)$ es perpendicular al conjunto de nivel de f de valor $f(\vec{x}_0)$.

Definición 4.8 *Una* **trayectoria** *en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación continua $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$ es una* **trayectoria en el plano**, *y si $n = 3$ es una* **trayectoria en el espacio**. *Llamamos* **curva** *a la imagen de c en $\mathbb{R}^n$. Si $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, definimos la* **velocidad** *de c como $c'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))^T$, y la* **aceleración** *de c como $c''(t) = (x_1''(t), \ldots, x_n''(t))^T$. Llamamos* **rapidez** *de c a la norma del vector velocidad $c'(t)$.*

5. Derivadas parciales de orden superior. Operadores del Cálculo Diferencial vectorial.

Definición 5.1 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos las* **derivadas parciales de orden** *2 de f como*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Esto puede repetirse para las derivadas de tercer orden o de orden superior a tres. De forma análoga se definen las derivadas parciales de orden mayor que uno para funciones de n variables.

Definición 5.2 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es* **de clase** *C^k en U si f y todas sus derivadas parciales de orden $1, 2, \ldots, k$, son continuas en U.*

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si $f = (f_1, \ldots, f_m)$, decimos que f es **de clase** *C^k en U si f_i es de clase C^k en U para $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Teorema 7. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es de clase C^2 en U entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir, si $1 \leq i, j \leq n$ se tiene en U

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Teorema 8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es de clase C^k en U entonces las derivadas parciales de orden k no dependen del orden de diferenciación.

Por ejemplo, si $f \in C^3$ en U, entonces

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i},$$

etc.

Definición 5.3 *Ya hemos definido el* **gradiente** *de $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como*

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big).$$

Definimos el **laplaciano** *de* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *como*

$$\operatorname{lapl} f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Definimos la **divergencia** *de* $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *(es decir,* $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$*) como*

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Definimos el **rotacional** *de* $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *(es decir,* $F = (F_1, F_2, F_3)$*) como*

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)^T.$$

Significado geométrico:

1. El **gradiente** de una función escalar f representa "la dirección de máximo crecimiento de dicha función", y además es perpendicular a las curvas de nivel.

2. El **laplaciano** de una función escalar f es un operador diferencial de segundo órden, relacionado con ciertos "problemas de minimización" de ciertas magnitudes sobre un cierto dominio.

3. La **divergencia** de un campo vectorial F "mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen". Si el campo tiene "fuentes" entonces $\operatorname{div} F > 0$, si tiene "sumideros" entonces $\operatorname{div} F < 0$, si se compensa $\operatorname{div} F = 0$.

4. El **rotacional** de un campo F es un operador vectorial que muestra la tendencia del campo vectorial F a inducir "rotación alrededor de un punto". Si $\operatorname{rot} F = 0$ en un punto significa que el fluido no tiene "remolinos" en dicho punto, por lo tanto es **irrotacional**.

6. Estudio local de funciones de varias variables

Definición 6.1 *Sean* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto,* $\vec{x}_0 \in U$ *y* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$*. Decimos que* $\vec{x}_0$ *es un* **máximo local** *de* f *si existe un entorno* V *de* $\vec{x}_0$ *tal que* $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ *para todo* $\vec{x} \in V$*;* $\vec{x}_0$ *es un* **máximo local estricto** *de* f *si existe un entorno* V *de* $\vec{x}_0$ *tal que* $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ *para todo* $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{x}_0\}$*. Decimos que* $\vec{x}_0$ *es un* **mínimo local** *de* f *si existe un entorno* V *de* $\vec{x}_0$ *tal que* $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ *para todo* $\vec{x} \in V$*;* $\vec{x}_0$ *es un* **mínimo local estricto** *de* f *si existe un entorno* V *de* $\vec{x}_0$ *tal que* $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ *para todo* $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{x}_0\}$*. El punto* $\vec{x}_0$ *es un* **extremo local** *de* f *si es un mínimo local o un máximo local. Los puntos* $\vec{x}_0$ *que verifican* $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$ *se denominan* **puntos críticos** *de* f*. Un punto crítico que no es un extremo local se denomina* **punto de silla***.*

Teorema 8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ y f presenta en $\vec{x}_0$ un extremo local, entonces $\vec{x}_0$ es un punto crítico de f, es decir, $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

Definición 6.2 *Sea* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*. Se define la* **matriz Hessiana** *de* f*, evaluada en un punto* $\vec{p} \in U$*, como*

$$Hf(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T \in U.$$

Recordamos que una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se llama simétrica si A coincide con su matriz transpuesta, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \le i, j \le n$.

Suponiendo que f es de clase C^2, vemos que la matriz Hessiana $Hf(\vec{p})$ es siempre una matriz simétrica.

Teorema 9. (Polinomio de Taylor de orden 1). Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ se tiene

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + R_1(\vec{x}_0, \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{h} \cdot \nabla f(\vec{x}_0) + R_1(\vec{x}_0, \vec{h}),$$

donde $\lim_{\vec{h}\to 0} R_1(\vec{x}_0, \vec{h})/\|\vec{h}\| = 0$.

Teorema 10. (Polinomio de Taylor de orden 2). Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en U y $\vec{x}_0 \in U$, se tiene

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) + R_2(\vec{x}_0, \vec{h}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \vec{h} \cdot \nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \vec{h}^T \cdot Hf(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + R_2(\vec{x}_0, \vec{h}), \end{aligned}$$

donde $\lim_{\vec{h}\to 0} R_2(\vec{x}_0, \vec{h})/\|\vec{h}\|^2 = 0$.

Los valores propios (autovalores) λ_j de una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ siempre son reales. Además, siempre existe una base ortonormal $\{v_j\}_{j=1}^n$ en $\mathbb{R}^n$, compuesta de autovectores de A:

$$Av_j = \lambda_j v_j, \qquad v_j \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, n,$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \ne j. \end{cases}$$

Definiciones. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica.

(1) A se llama *definida positiva* si todos sus autovalores λ_j son positivos;
(2) A se llama *definida negativa* si todos sus autovalores λ_j son negativos;
(3) A se llama *semidefinida positiva* si todos sus autovalores λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$;
(4) A se llama *semidefinida negativa* si todos sus autovalores λ_j satisfacen $\lambda_j \le 0$;
(5) A se llama *indefinida* si tiene tanto autovalores positivos como autovalores negativos.

Cualquier matriz simética no nula pertenece a una y sólo una de estas clases. La matrix $A = 0$ es semidefinida positiva y semidefinida negativa a la vez.

Teorema 11. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U, y $\vec{x}_0 \in U$ un punto crítico de f.

(1) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\vec{x}_0$ es un punto mínimo local estricto de f.

(2) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es definida negativa, entonces $\vec{x}_0$ es un punto máximo local estricto de f.

(3) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es semidefinida positiva, pero no es nula, entonces $\vec{x}_0$ es un punto un punto mínimo local o un punto silla de f.

(4) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es semidefinida negativa y no es nula, entonces $\vec{x}_0$ es un punto máximo local o un punto silla de f.

(5) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es indefinida, entonces $\vec{x}_0$ es un punto de silla de f.

Si $Hf(\vec{x}_0) = 0$, puede ocurrir cualquiera de las posibilidades: $\vec{x}_0$ puede ser tanto un punto mínimo local como un punto máximo local o un punto silla de f.

Los criterios de Sylvester para matrices definidas y para matrices semidefinidas permiten decidir, a cuál de estas clases pertenece la matriz sin necesidad de calcular sus autovalores.

Ver los enlaces:

`http://esfm.egormaximenko.com/linalg/quadratic_form_Sylvester_es.pdf`
(apuntes de Egor Maximenko)

`https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester's_criterion`
(Wikipedia en inglés)

Teorema 12. (Multiplicadores de Lagrange.) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en U. Sean $\vec{x}_0 \in U$, $c = g(\vec{x}_0)$ y S el conjunto de nivel de g de valor c (es decir, el conjunto de puntos $\vec{x} \in U$ tales que $g(\vec{x}) = c$). Supongamos que $\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Si la restricción de f a S (denotada por $f|_S$) tiene un máximo o un mínimo local en $\vec{x}_0$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0) \,.$$

Los puntos $\vec{x}_0$ que verifican $\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$ se denominan **puntos críticos** de $f|_S$.

Recordamos que, dado un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, su clausura $\overline{U}$ se define como la unión de U con la frontera de U (ver la Parte 1 de los apuntes).

Teorema 13. (Localización de máximos y mínimos absolutos.) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{U}$. Entonces los valores máximo y mínimo de f en $\overline{U}$ se alcanzan en puntos pertenecientes a alguno de los siguientes conjuntos:

(1) los puntos de U en los que f no es diferenciable,
(2) los puntos críticos de f en U,
(3) los puntos máximo y mínimo de $f|_{\partial U}$.

Teorema 13′. (Localización de máximos y mínimos absolutos, otra versión.) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, A un conjunto abierto que contiene a $\overline{U}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en A. Supongamos que existen $c \in \mathbb{R}$ y una función g tales que $\partial U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g(\vec{x}) = c\}$, g es diferenciable en ∂U y $\nabla g(\vec{x}) \neq 0$ para todo $\vec{x} \in \partial U$. Entonces los valores máximo y mínimo de f en $\overline{U}$ se alcanzan en los puntos críticos de f en U o en los puntos críticos de $f|_{\partial U}$.

7. Diferenciación de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. La matriz de Jacobi. La regla de cadena.

Definición 7.1 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que f es* **diferenciable** *en $\vec{x}_0$ si las derivadas parciales de f existen en $\vec{x}_0$ y si*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \mathbf{T}(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0 \,,$$

donde $\mathbf{T}$ es la siguiente matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{T}(\vec{x} - \vec{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ con $\vec{x} - \vec{x}_0$. La matriz T tiene orden $m \times n$, su elemento en la fila i y columna j es $\partial f_i / \partial x_j$ evaluada en $\vec{x}_0$. Esta matriz se llama la **derivada** *o* **matriz jacobiana** *de f en $\vec{x}_0$.*

Notación: $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\vec{x}_0)$.

Otra notación: Si los puntos de U se denotan como $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ y los puntos de $\mathbb{R}^m$ se denotan como $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$, entonces se escribe

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix} = f(x_1, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{D}f(\vec{x}_0) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m\times n}.$$

Observación 7.2 *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en U, entonces la matriz derivada de f en $\vec{x}$ tiene 1 fila y n columnas:*

$$\mathbf{D}f(\vec{x}) = \Big(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\Big).$$

Entonces el gradiente de f en $\vec{x}$ se relaciona con $\mathbf{D}f(\vec{x})$ de la siguiente forma:

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \big(\mathbf{D}f(\vec{x})\big)^T.$$

Teorema 14. (Regla de la cadena.) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos con $\vec{x}_0 \in U$ y $f(\vec{x}_0) \in V$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Si $f(\vec{x})$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y $g(\vec{x})$ es diferenciable en $f(\vec{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, y se tiene la igualdad de matrices:

$$\underbrace{\mathbf{D}\big(g \circ f\big)(\vec{x}_0)}_{k\times n} = \underbrace{(\mathbf{D}g)(f(\vec{x}_0))}_{k\times m} \cdot \underbrace{\mathbf{D}f(\vec{x}_0)}_{m\times n}.$$

Ejemplo 1. Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir $\vec{g}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$. Si definimos $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h = f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$f(\vec{g}(t)) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big),$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Ejemplo 2. Si $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir

$$\vec{g}(x, y, z) = \big(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\big)^T.$$

Si definimos $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(x, y, z) = f(\vec{g}(x, y, z)) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$, entonces

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Observación 7.3 *Para deducir el Teorema 5 de la Regla de cadena, basta poner $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{v}$, de forma que $\mathbf{D}x(t) = \vec{v}$ para todo t. Entonces tenemos*

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) = \mathbf{D}(f \circ \vec{x})(t) = \mathbf{D}f\big(\vec{x}(t)\big)\,\mathbf{D}\vec{x}(t) = \mathbf{D}f\big(\vec{x}(t)\big)\vec{v};$$
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t\vec{v})\Big|_{t=0} = \mathbf{D}f\big(\vec{x}(0)\big)\vec{v} = \mathbf{D}f\big(\vec{x}_0\big)\vec{v} = <\nabla f\big(\vec{x}_0\big), \vec{v}>.$$

Hemos obtenido la siguiente fórmula para la derivada direccional de f en $\vec{x}_0$ en la dirección $\vec{v}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \mathbf{D}f(\vec{x}_0)\vec{v} = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle.$$

Teorema 15. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos abiertos. Sean

$$f : A \to B, \qquad g : B \to A$$

funciones inversas una a otra (es decir, $f \circ g(\vec{x}) = \vec{x}$ para todo $\vec{x} \in A$ y $g \circ f(\vec{y}) = \vec{y}$ para todo $\vec{y} \in B$). Si $\vec{p}_0 \in A$, $\vec{q}_0 = f(\vec{p}_0) \in B$, f es diferenciable en $\vec{p}_0$ y la matriz jacobiana $\mathbf{D}f(\vec{p}_0)$ no es singular, entonces g es diferenciable en $\vec{q}_0$ y

$$\mathbf{D}g(\vec{q}_0) = \big[\mathbf{D}f(\vec{p}_0)\big]^{-1}.$$

En otras palabras, si $\vec{y} = f(\vec{x})$, $x \in A$, entonces $\vec{x} = g(\vec{y})$, $y \in B$, y

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \left[\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right]^{-1}.$$

8. Integración en $\mathbb{R}^n$

Definición 8.1 *Sea R un* **rectángulo n-dimensional** $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, *con $a_i < b_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Se define el* ***volumen n-dimensional*** *de R como*

$$|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Observación. Habitualmente la dimensión n será dos o tres, por lo que estaremos trabajando con subconjuntos del plano o del espacio. Si $n = 2$, la medida de R es el área de R. Si $n = 3$, la medida de R es el volumen de R en el sentido usual.

Definición 8.2 *Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice que tiene* **volumen cero** *(n-dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existen rectángulos n-dimensionales $R_1, R_2, \ldots, R_m$ tales que*

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m \qquad y \qquad |R_1| + |R_2| + \cdots + |R_m| < \varepsilon\,.$$

Diremos que una propiedad se verifica en **casi todo punto de** *B si el conjunto de puntos de B que no verifican esa propiedad tiene medida cero.*

Definición 8.3 ***1)*** *Una* **partición** *P del rectángulo n-dimensional R es una partición de cada uno de los intervalos coordenados $[a_i, b_i]$, de modo que expresamos R como unión de subrectángulos $R = \cup_{i=1}^N R_i$.*

2) *Dada una partición $R = \cup_{i=1}^N R_i$ de R, entondemos por su* ***rango*** *el máximo de los diametros de los subrectángulos R_i. Está claro que se puede encontrar particiones de R de rangos tan pequeños como queramos.*

Sea R un rectángulo n-dimensional, $f : R \to \mathbb{R}$ una función y sea $P = \cup_{i=1}^N R_i$ una partición de R. **La suma de Riemann de** f que corresponde a una partición P es la suma finita

$$S = \sum_i f(\vec{x}_i) \cdot |R_i|\,, \qquad (***)$$

donde los puntos $\vec{x}_i \in R_i$ se eligen de forma arbitraria.

Definición 8.4 *Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función en un rectángulo n-dimensional R. Vamos a decir que f es* <u>*admisible*</u> *si está acotada en R y es continua en R salvo en un subconjunto de R de volumen n-dimensional* 0.

Definición 8.5 *Sea f una función admisible en R, siendo R un rectángulo n-dimensional. Se puede demostrar que entonces existe un único número I tal que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que cualquier suma de Riemann (***) que corresponde a cualquier partición de R de rango menor que δ satisface*

$$|S - I| < \varepsilon.$$

Al número I lo llamaremos la ***integral (definida)*** *de f en R, y lo escribiremos*

$$I = \int_R f = \int_R f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n\,.$$

Teorema 16. (Teorema de Fubini para el caso de dos variables). Sea

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [a_1, b_1],\ y \in [a_2, b_2]\right\}$$

un rectángulo 2-dimensional. Si f es una función admisible en R entonces

$$\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} \Big(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy \Big)\, dx = \int_{a_2}^{b_2} \Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \Big)\, dy\,.$$

Ejemplo 8.6 *Sea $f(x, y) = x^2 y^3$ Calcular la integral $\iint f(x, y)\, dx\, dy$, donde $R = [0, 1] \times [0, 2]$.*
Solución:

$$\iint x^2 y^3\, dx\, dy = \int_0^1 \Big(\int_0^2 x^2 y^3\, dy \Big)\, dx = \int_0^1 \Big(\frac{y^4}{4}\Big|_{y=0}^{y=2} \Big)\, dx = \int_0^1 4x^2\, dx = \frac{4}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}\,.$$

Nótese el uso del símbolo $\iint$ para denotar la integral de una función de dos variables.
Teorema 16′. (Teorema de Fubini, caso general). Sea

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \in [a_1, b_1],\ x_2 \in [a_2, b_2],\ \ldots, x_n \in [a_n, b_n]\,.\right\}$$

un rectángulo n-dimensional. Lo representamos como $R = R_1 \times R_2$, donde $R_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_j, b_j]$ y $R_2 = [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si f es una función admisible en R entonces

$$\int_R f = \int_{R_1} \Big(\int_{R_2} f(x, y)\, dy \Big)\, dx = \int_{R_2} \Big(\int_{R_1} f(x, y)\, dx \Big)\, dy\,,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_j)$ e $y = (x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

En el caso de 3 variables, cuando $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, podemos poner

$$R_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad R_2 = [a_3, b_3],$$

ó bien

$$R_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad R_2 = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3].$$

En el primer caso, el Teorema de Fubini nos da la fórmula

$$\iiint_R f = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \Big(\int_{[a_3,b_3]} f(x, y)\, dy \Big)\, dx = \int_{[a_3,b_3]} \Big(\iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x, y)\, dx \Big)\, dy\,,$$

es decir, el cálculo de una integral triple se reduce al cálculo simbólico de una integral una integral simple de una función de una sola variable y luego a una integral doble.

Nótese que el símbolo $\iiint$ se utiliza para denotar la integrales de funciones de tres variables. En un contexto más abstracto, se utiliza también la notación $\int_R f(\vec{x})\, d\vec{x}$ para la integral de una función de n variables.

Por una **región** en $\mathbb{R}^n$ entendemos un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 8.7 *Sea D es una región acotada en $\mathbb{R}^n$, cuya frontera tiene volumen 0. Sea f una función admisible en D se define la* **integral de f en D** *como*

$$\int_D f = \int_R f^*,$$

donde R es cualquier rectángulo n-dimensional que contenga a D y f^* es la función definida en todo $\mathbb{R}^n$ como

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Teorema 17. Sean f, g funciones integrables en la región acotada D y sea $c \in \mathbb{R}$ una constante. Entonces *

$$(i)\ f+g \text{ es integrable en } D \ \text{ y } \int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g,$$

$$(ii)\ cf \text{ es integrable en } D \ \text{ y } \int_D cf = c\int_D f,$$

$$(iii) \text{ Si } f \le g \text{ en } D, \text{ entonces} \int_D f \le \int_D g,$$

$$(iv)\ |f| \text{ es integrable en } D \ \text{ y } \int_D |f| \ge \left|\int_D f\right|,$$

$$(v)\ f\cdot g \text{ es integrable en } D \ \text{ y } \left(\int_D fg\right)^2 \le \left(\int_D f^2\right)\left(\int_D g^2\right).$$

Observaciones. Las propiedades (i) y (ii) nos indican que el conjunto de las funciones integrables en D es un espacio vectorial y la integral es un operador lineal en este espacio. La propiedad (v) se denomina **desigualdad de Cauchy-Schwarz**. La propiedad (iii) implica, en particular, que $\int_D f \ge 0$ si $f \ge 0$ en D.

Ejercicio. Se define el producto directo

$$D \times D = \{(x_1, x_2, \dots x_{2n}) : \quad (x_1, x_2, \dots x_n) \in D,\ (x_{n+1}, x_2, \dots x_{2n}) \in D.\}$$

Sean f, g funciones integrables en D. Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a partir de la obvia desigualdad

$$\int_{D\times D} \big(f(x)g(y) - g(x)f(y)\big)^2\, dx\, dy \ge 0.$$

Lema 1.
(1) Se obtiene una definición equivalente de conjuntos de medida cero si se toman rectángulos abiertos (o bolas abiertas o bolas cerradas) en vez de rectángulos cerrados.
(2) Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
(3) Si A es un conjunto finito o numerable y compacto, entonces $|A| = 0$. *Se dice que A es numerable si $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots\}$, donde $\{\vec{a}_n\}$ es una sucesión de puntos (finita o infinita).*
(4) La unión finita de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
(5) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es una gráfica de una función continua:

$$A = \Big\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \qquad (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \Omega, \quad x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\Big\},$$

donde f está definida en un subconjunto compacto Ω de $\mathbb{R}^{n-1}$ y es contunua, entonces $|A| = 0$.

Se puede demostrar también que $|A| = 0$ si A es un conjunto compacto infinito, pero numerable, es decir, $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots\}$, donde $\{\vec{a}_n\}$ es una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^n$.

Corolario 1. La unión finita de curvas en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero si $n \ge 2$. La unión finita de superficies en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero si $n \ge 3$.

Definición 8.8 *Si la región acotada D verifica $|\partial D| = 0$, se define la medida de D como $|D| = \int_D 1$. Por tanto, si $D \subset \mathbb{R}^2$, $\int_D 1$ es el área de D y, si $D \subset \mathbb{R}^3$, $\int_D 1$ es el volumen de D.*

El siguiente resultado proporciona un método práctico del cálculo de integrales de funciones de 2 variables.

Teorema 18. Sea D un conjunto acotado en $\mathbb{R}^2$, cuya frontera tiene área cero. Fijado un $x \in \mathbb{R}$, denotamos

$$D_{x\bullet} = \{y \in \mathbb{R} : (x, y)^T \in D\}.$$

Sea $X(D)$ la proyección de D sobre el eje x (normalmente, es un intervalo).

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función admisible, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{X(D)} \Big(\int_{D_{x\bullet}} f(x, y)\, dy \Big)\, dx.$$

Ejemplo 8.9 *Sea D el triángulo acotado por el eje x, la recta $x = 1$ y la recta $y = 2x$. Calcular $\iint_D xy\, dx\, dy$.*

Solución: *La proyeccción $X(D)$ del triángulo D sobre el eje x es el intervalo $[0, 1]$. Dado un $x \in [0, 1]$, $D_{x\cdot}$ es el conjunto de puntos $y \in \mathbb{R}$ tales que el punto del plano $(x, y)^T$ pertenece a nuestro triángulo. Luego $D_{x\bullet} = [0, 2x]$. Aplicando la fórmula, obtenemos:*

$$\iint_D xy\, dx\, dy = \int_0^1 \Big(\int_0^{2x} xy\, dy \Big)\, dx = \int_0^1 \Big(\frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2x} \Big)\, dx = \int_0^1 2x^3\, dx = \frac{1}{2}.$$

En este ejemplo, la integral doble se reduce a una integral *iterada*, donde la integración respecto de y es interior y la integración respecto de x es exterior. Podemos hacerlo en otro orden. Si fijamos un $y \in \mathbb{R}$, se define

$$D_{\bullet y} = \{x \in \mathbb{R} : (x, y)^T \in D\}.$$

Entonces se tiene la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{Y(D)} \Big(\int_{D_{\bullet y}} f(x, y)\, dx \Big)\, dy\,,$$

donde $Y(D)$ es la proyección de D sobre el eje y. En el ejemplo anterior, el intervalo $Y(D)$ es el intervalo $[0, 2]$, y $D_{\bullet y} = [y/2, 1]$ para todo $y \in [0, 2]$. Si calculamos la integral doble de esta forma, obtenemos:

$$\begin{aligned}\iint_D xy\, dx\, dy = \int_0^2 \Big(\int_{y/2}^1 xy\, dx \Big)\, dy = \int_0^2 \Big(\frac{x^2 y}{2} \Big|_{x=y/2}^{x=1} \Big)\, dy \\ = \int_0^2 \big(\frac{1}{2} - \frac{y^3}{8} \big)\, dx = \frac{y}{2} - \frac{y^4}{32} \Big|_{y=0}^{y=2} = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por supuesto, la respuesta es la misma.

Fórmulas para las integrales triples Dada una región acotada D en $\mathbb{R}^3$, denotamos por $X(D)$ la proyección de D sobre el eje x, por $XY(D)$ la proyección de D sobre el plano xy, etc.

Fijado un $x_0 \in \mathbb{R}$, ponemos

$$D_{x_0\bullet\bullet} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x_0, y, z)^T \in D\}.$$

Es la proyección de la intersección de D con el plano $x = x_0$ (paralelo al plano yz) sobre el plano yz.

De la misma forma, fijado un punto (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$, ponemos

$$D_{x_0\, y_0\,\bullet} = \{z \in \mathbb{R} : (x_0, y_0, z)^T \in D\}.$$

Es la proyección de la intersección de D con la recta $x = x_0, y = y_0$, paralela al eje z, sobre el eje z.

Con esta notación, se tienen las fórmulas

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{X(D)} dx \iint_{D_{x\bullet\bullet}} f(x, y, z)\, dy\, dz;$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{XY(D)} dx\,dy \int_{D_{xy\bullet}} f(x,y,z)\,dz,$$

que reducen el cálculo de una integral triple a un cálculo consecutivo de una integral simple y una doble.

Cambiando el orden de integración, se puede escribir más fórmulas de este tipo, por ejemplo:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{Z(D)} dz \iint_{D_{\bullet\bullet z}} f(x,y,z)\,dx\,dy,$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{XZ(D)} dx\,dz \iint_{D_{x\bullet z}} f(x,y,z)\,dx\,dz,$$

etcétera.

Teorema 19. Sea D una región acotada. Si las funciones f y g son integrables en D y son iguales en casi todo punto de D, es decir, el conjunto $\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$ tiene volumen n-dimensional cero, entonces

$$\int_D f = \int_D g\,.$$

Teorema 20. Si f está definida en una región acotada D, es admisible y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in D$, entonces

$$m\,|D| \leq \int_D f \leq M\,|D|\,.$$

Teorema 21. Sea f una función admisible en la región acotada D. Si $f(x) \geq 0$ para casi todo $x \in D$ y existe un punto $x_0 \in D$ con f continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces

$$\int_D f > 0\,.$$

Teorema 22. Sean D una región acotada y f una función definida en D. Si D es la unión de las regiones de interiores disjuntos $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$, con $|\partial D_i| = 0$ para $i = 1, \ldots, k$, entonces f es integrable en D si y sólo si es integrable en D_i para $i = 1, \ldots, k$. Además se tiene que

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} f\,.$$

Definición 8.10 *Sean Ω^* un dominio en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{x} = T(\vec{u})$ una transformación diferenciable, donde $T : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El* **jacobiano** *de T es el determinante de la matriz derivada de T, es decir,*

$$JT(\vec{u}) = \det \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} = \det(DT(\vec{u})), \quad \vec{u} \in \Omega^*.$$

Teorema 24. (Teorema de cambio de variable). Sean Ω^* y Ω regiones acotadas de $\mathbb{R}^n$ y $T : \Omega^* \longrightarrow \Omega$ una transformación biyectiva de clase C^1. Entonces para toda f integrable en Ω se tiene

$$\int_\Omega f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{\Omega^*} f(T(\vec{u}))\,|JT(\vec{u})|\,d\vec{u}\,,$$

donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$.

Observación 1. El Teorema de cambio de variable sigue siendo cierto si las hipótesis de biyectividad y diferenciabilidad dejan de cumplirse en conjuntos de medida cero.

Observación 2. Si T^{-1} denota la inversa de la aplicación diferenciable T, del Teorema de la función inversa se deduce $(JT(\vec{u})) \cdot (JT^{-1}\big(T(\vec{u})\big)) = 1$, $t \in \Omega^*$.

Cambio a coordenadas polares. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a (r, θ), con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, mediante las fórmulas:

$$x = r \cos \theta \,, \qquad\qquad y = r \operatorname{sen} \theta \,.$$

El determinante jacobiano del cambio es r.

Cambio a coordenadas cilíndricas. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a (r, θ, z), con $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$, mediante las fórmulas:

$$x = r \cos \theta \,, \qquad\qquad y = r \operatorname{sen} \theta \,, \qquad\qquad z = z \,.$$

El determinante jacobiano del cambio es r.

Cambio a coordenadas esféricas. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a (ρ, φ, θ), con $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, mediante las fórmulas:

$$x = \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \,, \qquad\qquad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \,, \qquad\qquad z = \rho \cos \theta \,.$$

El determinante jacobiano del cambio es $\rho^2 \operatorname{sen} \theta$.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL EN DIMENSION n.

Valor medio. Si D es una región acotada en $\mathbb{R}^n$ y f es una función integrable en D se define el **promedio** o **valor medio de** f **en** D como

$$\frac{1}{|D|} \int_D f = \frac{\int_D f}{\int_D 1} \,.$$

Centro de gravedad. Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **centro de gravedad** o **centro de masa** (y lo denotaremos por $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$), como

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{M} \iiint_D x\rho(x, y, z) \, dxdydz \,, \\ \overline{y} &= \frac{1}{M} \iiint_D y\rho(x, y, z) \, dxdydz \,, \\ \overline{z} &= \frac{1}{M} \iiint_D z\rho(x, y, z) \, dxdydz \,, \end{aligned}$$

donde M es la **masa** del cuerpo, que puede calcularse como $M = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dxdydz$.

Momento de inercia. Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **momento de inercia respecto del eje E** (y lo denotaremos por I_E) como

$$I_E = \iiint_D \operatorname{dist}\left((x, y, z), E\right)^2 \rho(x, y, z) \, dxdydz \,,$$

donde $\operatorname{dist}((x, y, z), E)$ es la distancia del punto (x, y, z) al eje E. Recordemos que $\operatorname{dist}((x, y, z), X)^2 = y^2 + z^2$, $\operatorname{dist}((x, y, z), Y)^2 = x^2 + z^2$ y $\operatorname{dist}((x, y, z), Z)^2 = x^2 + y^2$.