Matemáticas I **1º de Ingeniería Química**

EXAMEN FINAL DEL 19 DE ENERO DE 2016
Tiempo disponible: 3 horas 30 minutos

APELLIDOS, NOMBRE ______________________________

D.N.I. ____________________ FIRMA ____________________

1. (2 puntos) Se consideran las familias $U = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$, $\quad V = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ de vectores en $\mathbb{R}^4$, donde

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Para cada una de estas dos familias, decidir si es linealmente independiente, si genera $\mathbb{R}^4$ y si es una base de $\mathbb{R}^4$. Justificar en cada caso.
b) Se definen los correspondientes subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por estas familias: $X = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$, $Y = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle$. Calcular sus dimensiones y sus bases.
c) Calcular las dimensiones de $X \cap Y$ y $X + Y$. Encontrar unas bases de estos subespacios.

---

2. (2 puntos)
a) Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. Calcula una matriz invertible P y una matriz diagonal D para las que se cumpla la relación $AP = PD$.
b) Hacer lo mismo para la matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Comprobar que en la relación $BP' = P'D'$ se puede escoger $P' = P$. Comprobar también que $AB = BA$.
c) Demostrar que para dos matrices cuadradas A y B de cualquier tamaño tales que $AP = PD$, $BP = PD'$ (donde D, D' son diagonales y P es la misma matriz invertible), se cumple $AB = BA$.

---

3. (2 puntos) Las concentraciones de las sustancias A y B en la sangre de un paciente después de la toma de un medicamento vienen dadas por

$$C_A(t) = \frac{t}{1+3t^2}, \quad C_B(t) = \frac{t}{1+t^3},$$

donde t es el tiempo en horas.
a) Calcular la máxima concentración de estas sustancias, el máximo del cociente C_B/C_A y los momentos del tiempo cuando se alcanzan.
b) Dibujar las gráficas de las funciones $C_A(t), C_B(t)$ y $C_B(t)/C_A(t)$, indicando los intervalos de monotonía y el comportamiento en el infinito.

---

4. (2 puntos) Halla y clasifica los puntos críticos de la función $f(x, y) = xy^2 - 2xy - x^2$.

---

5. (2 puntos) Evalúa la integral doble $\iint_R \frac{1}{x+y}\, dx\, dy$, donde R es el triángulo acotado por las rectas $y = 1$, $x = 2$ y $x = y$.
