Matemáticas I **1º de Ingeniería Química**

Segundo Control, Miércoles 28 de Octubre de 2015

Tiempo disponible: 2 horas

Apellidos, Nombre ____________________

D.N.I. ____________________

---

1) Se consideran las siguientes familias de vectores columna:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Comprobar que α es una base de $\mathbb{R}^3$ y β es una base de $\mathbb{R}^2$;

b) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$T\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_3, \quad T\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3.$$

Determinar la matriz $[T]_{\alpha\beta}$ de la aplicación T (β es la base de salida y α es la base de llegada).

¿Es cierto que estas condiciones determinan la aplicación T de forma única?

c) Calcular la matriz de T respecto de las bases estándar en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

---

2) Sea X el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido por la ecuación $x + 2y - 3z + 5t = 0$, e Y el subespacio generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la dimensión de $X \cap Y$ y una base para dicho subespacio.

b) Calcula la dimensión de $X + Y$ y una base para dicho subespacio.

---

3) **a)** Sea V un espacio vectorial y sea M un subconjunto de V. ¿En qué caso se dice que M es un subespacio vectorial del espacio V? Dar ejemplos de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ de todas las dimensiones posibles y ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, que no son subespacios.

b) Sea T una aplicación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. ¿Qué significa que la aplicación T es lineal?

c) Recordamos que dada una aplicación lineal T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, se definen los conjuntos

$$\ker T = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : T(\vec{v}) = \vec{0} \right\}, \quad \operatorname{Imag} T = \left\{ T(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Demostrar que $\ker T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y que $\operatorname{Imag} T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

---

4) **a)** Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \cos(x^2), \quad g(x) = \frac{e^{-2x}}{x}, \quad h(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

(ln es el logaritmo natural, ó neperiano).

b) Calcular las siguientes integrales indefinidas (antiderivadas):

$$\int \operatorname{sen}(5x)\, dx, \quad \int x^2 e^{x^3}\, dx, \quad \int \frac{x^2}{x-2}\, dx, \quad \int x \ln(x)\, dx.$$

c) Se considera la ecuación $z = \dfrac{-1 - 5i}{z - 2 - 2i} + \dfrac{1 - 3i}{z + 2 + 2i}$. Reescribirla como una ecuación cúbica.

Encontrar todas las raíces de la ecuación obtenida.