M1, 19/01/2016

(1)

a) Se ve que $\vec{u}_1 \neq \lambda \vec{u}_2$, luego $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ son linealmente independientes. No generan $\mathbb{R}^4$ (para ello se necesitan al menos 4 vectores). Por tanto, no son una base de $\mathbb{R}^4$.

Reducimos la matriz compuesta de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ a una forma escalonada:

$$(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +4F_1 \\ -2F_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -18 & 6 \\ 0 & -15 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +6F_2 \\ +5F_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -5 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Columnas pivote: 1ª y 2ª. luego $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de $V = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ (espacio generado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$). Luego $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ no son linealmente independientes. No generan $\mathbb{R}^4$, no son una base de $\mathbb{R}^4$.

b) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de $X = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de $Y = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

$$\dim X = \dim Y = 2.$$

c) Como $Y = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, vemos que un vector $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^4$ pertenece a $X \cap Y$ si y sólo si

$$\vec{w} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = -z\vec{v}_1 - t\vec{v}_2.$$

Tenemos que resolver el sistema

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 = (\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \vec{v}_1 | \vec{v}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$(\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \vec{v}_1 | \vec{v}_2) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & -4 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -3F_1 \\ +2F_1 \\ -5F_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 16 & -3 & 18 \\ 0 & -16 & -2 & -8 \\ 0 & 32 & -3 & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +F_2 \\ -2F_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 16 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +\frac{3}{5}F_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -5 & 1 & -5 \\ 0 & \boxed{16} & -3 & 18 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

El sistema se reduce a

$$\begin{cases} x - 5y + z - 5t = 0 \\ \quad 16y - 3z + 18t = 0 \\ \quad \cancel{} - 5z + 10t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \text{ libre} \\ z = 2t \\ y = \dfrac{-18t + 3z}{16} = \dfrac{-18t + 6t}{16} = -\dfrac{12}{16}t = -\dfrac{3}{4}t. \\ x = 5y - z + 5t = -\dfrac{15}{4}t - 2t + 5t = -\dfrac{3}{4}t. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3/4 \\ -3/4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego los vectores en $X \cap Y$ tienen la forma

$$\vec{w} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = -\frac{3}{4}t\,\vec{u}_1 - \frac{3}{4}t\,\vec{u}_2 =$$

$$= -\frac{3}{4}t\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Luego $\dim X \cap Y = 1$, $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$ es una base del subespacio $X \cap Y$.

Sustituyendo $\vec{w} = -2t\vec{v}_1 - t\vec{v}_2$, se obtiene el mismo resultado.

Se obtiene

$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y) =$$

$$= 2 + 2 - 1 = 3,$$

Para encontrar la base de $X+Y$, se puede utilizar la forma escalonada de $(\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \vec{v}_1 | \vec{v}_2)$ que ya obtuvimos.

Como $X + Y = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ y los pivotes de la forma escalonada están en las columnas 1, 2, 3, obtenemos que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1\}$ es una base de $X+Y$.

2) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-18 =$

$= \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = 7.$

Los autovalores son distintos $\Rightarrow A$ es diagonalizable. Encontramos autovectores de A:

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poniendo $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$,

obtenemos $AP = PD$.

b). ~~Al~~ Las columnas de P tienen que ser autovectores de B.

Comprobamos que los autovectores de A son también autovectores de B:

$$B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};$$

$$B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Luego los autovectores de B son 3, −9.

Ponemos $P'=P=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $D'=\begin{pmatrix}3&0\\0&-9\end{pmatrix}$.

Los cálculos anteriores implican que $BP'=P'D'$. Se ve que

$$AB=\begin{pmatrix}1&3\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&23\\46&40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$$
$$=BA.$$

c) Suponiendo que $AP=PD$, $BP=PD'$, P invertible, obtenemos: $A=PDP^{-1}$; $B=PD'P^{-1}$

$$AB=PDP^{-1}\cdot PD'P^{-1}=PDD'P^{-1}=$$

$$=PD'DP^{-1}=PD'P^{-1}\cdot PDP^{-1}=BA,$$

porque $DD'=D'D$, al ser D, D' matrices diagonales.

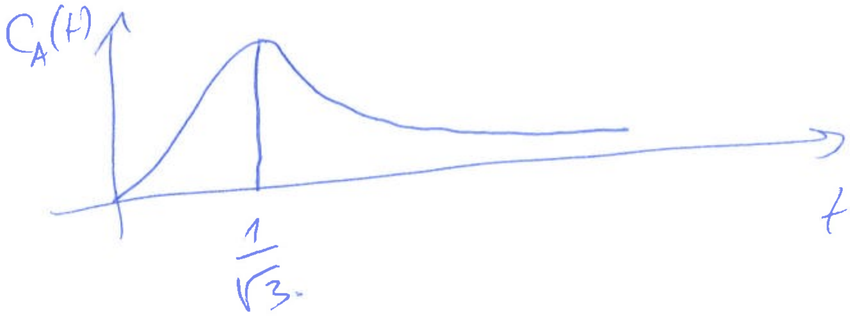
$\boxed{3}$ $\quad C_A(t) = \dfrac{t}{1+3t^2}, \quad C_B(t) = \dfrac{t}{1+t^3}, \quad \dfrac{C_B(t)}{C_A(t)} = \dfrac{1+3t^2}{1+t^3}.$

$(t \geq 0)$

1) $C_A'(t) = \dfrac{1+3t^2-6t^2}{(1+3t^2)^2} = \dfrac{1-3t^2}{(1+3t^2)^2} = 0 \rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ (h)$

C_A': $\quad 0 \quad > 0 \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad < 0. \quad \infty$

Luego $\max\limits_{t \in [0,+\infty)} C_A(t) = C_A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}(1+1)} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}.$



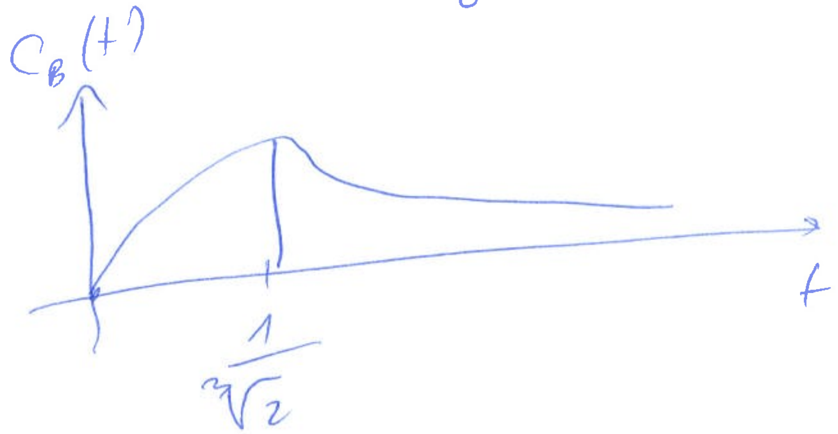
$\lim\limits_{t \to +\infty} C_A(t) = 0.$

2) $C_B'(t) = \dfrac{1+t^3-3t^3}{(1+t^3)^2} = \dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} = 0 \rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

$C_B' > 0$ en $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$, $\quad C_B' < 0$ en $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right).$

Luego $\max\limits_{[0,+\infty)} C_B'(t) = C_B\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)} =$

$= \dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}}.$



$$\lim_{t \to +\infty} C_B(t) = 0.$$

3) $$\left(\frac{C_B(t)}{C_A(t)}\right)' = \frac{6t(1+t^3) - 3t^2(1+3t^2)}{(1+t^3)^2} =$$

$$= \frac{6t + 6t^4 - 3t^2 - 9t^4}{(1+t^3)^2} = 0$$

$$6t - 3t^2 - 3t^4 = 0$$

$$t(6 - 3t - 3t^3) = 0.$$

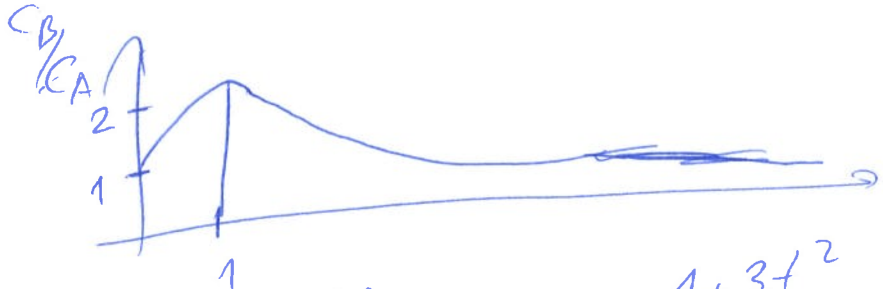
1) $t = 0$

2) $t \neq 0 \to 6 - 3t - 3t^3 = 0 \to t = 1$

(porque $6 - 3t - 3t^3$ es estrictamente decreciente).

$\left(\frac{C_B}{C_A}\right)' > 0$ en $[0, 1)$, $\left(\frac{C_B}{C_A}\right)' < 0$ en $(1, +\infty)$.

Luego $$\max_{[0,+\infty)} \frac{C_B}{C_A} = \frac{C_B}{C_A}(1) = \frac{1+3\cdot 1^2}{1+1^3} = 2.$$



$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_B(t)}{C_A(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1+3t^2}{1+t^3} = 0.$$

(el grado del denominador es mayor).

$\boxed{4}$ $f(x,y) = xy^2 - 2xy - x^2$.

Puntos críticos: $\begin{cases} f'_x = y^2 - 2y - 2x = 0 \\ f'_y = 2xy - 2x = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 - 2y - 2x = 0 \\ 2x(y-1) = 0 \end{cases}$$

1) $x = 0$ $\quad y^2 - 2y = 0 \to (0,0)$, $\to (0,2)$

2) $x \neq 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \to y = 1 \to 1^2 - 2\cdot 1 - 2x = 0$

$x = -\frac{1}{2} \to \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Los puntos críticos de f son: $(0,0), (0,2), \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{pmatrix}.$$

1) $(0,0)$:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad D_1 = -2 , \quad D_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

Luego $(0,0)$ es un punto silla

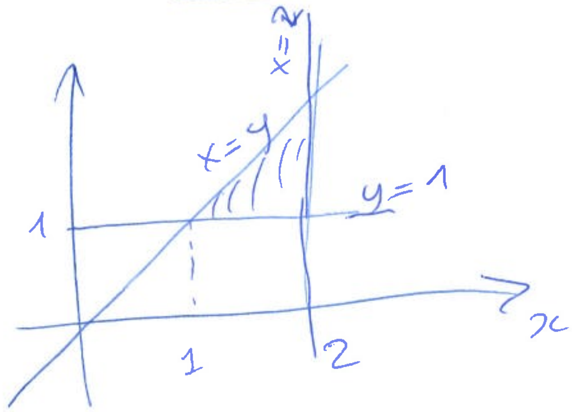
2) $(0,2)$: $H(0,2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D_1 < 0$, $D_2 < 0$

$(0,2)$ es también un punto silla

3) $H(-\frac{1}{2}, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $D_1 < 0$, $D_2 > 0$.

Es un <u>máximo local</u>.

$\boxed{5}$



$$\int_1^2 \left(\int_1^x \frac{dy}{x+y} \right) dx = \int_1^2 \ln(x+y) \Big|_{y=1}^{y=x} dx$$

$$= \int_1^2 \ln(2x) - \ln(1+x) \, dx = uv \Big|_{x=1}^{x=2} - \int v \, du =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln(2x) - \ln(1+x) \\ v = x \end{array}}$$

$$du = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= x\left(\ln(2x) - \ln(1+x)\right)\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= 2\left(\ln 4 - \ln 3\right) - \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx =$$

$$= 2\left(\ln 4 - \ln 3\right) - \ln(1+x)\Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \ln 2 - 2\ln 3 - \ln 3 + \ln 2 =$$

$$= 5\ln 2 - 3\ln 2 = \ln\frac{32}{27}.$$