§ 4. Operación de hallar los límites. Comparación de las magnitudes infinitesimales

Funciones de argumento entero

En los ejercicios 245—267 hallar los límites.

245. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$.

246. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$.

247. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

248. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$.

249. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

251. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

252. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

253. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

254. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

255. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$.

256. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$.

257. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

258. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

259. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

260. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

261. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

262. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

263. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{n^2+1}\right)$.

264*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}\right)$.

265. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

266. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$.

267. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

Función de argumento continuo

En los ejercicios 268—304 hallar los límites.

268. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$.

269. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

270. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{1-x}$.

271. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

272. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

273. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

274. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

275. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

276. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

277. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

278. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$.

279. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$.

280. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m y n son números enteros).

281. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

282. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

283. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$.

284. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

285. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

286. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

287. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$.

288. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

289. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

290. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

291. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$.

292. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

293. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

294. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

295. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

296. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

297. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

298. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

299. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

300. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

301. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}\ (a>b)$.

302. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (n y m son números enteros).

303*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

304. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

305. ¿De qué manera varían las raíces de la ecuación cuadrada $ax^2+bx+c=0$ cuando b y c conservan sus valores constantes ($b\neq 0$) y la magnitud a tiende a cero?

En los ejercicios 306—378 hallar los límites.

306. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

307. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

308. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$ *).

309. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

310. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

311. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

312. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

313. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

---

314. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

315. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

316. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x}$.

317. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$.

318. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha^n)}{(\operatorname{sen}\alpha)^m}$ (n y m son números enteros positivos).

---

* En los ejemplos en que se presenta $x\to\pm\infty$ deben ser considerados separadamente los casos de $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

319. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \arcsen x}{3x}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-\arcsen x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

321. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

322. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{sen} 2x}$.

323. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.

324. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}$.

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\alpha^3}$.

326. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha}$.

327. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

328. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

329. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\operatorname{sen} x)^2}}$.

330. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$.

331. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) \operatorname{tg} x$.

332. $\lim\limits_{\alpha\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

333. $\lim\limits_{z\to 1} (1-z) \operatorname{tg} \dfrac{\pi z}{2}$.

334. $\lim\limits_{y\to a} \left(\operatorname{sen}\dfrac{y-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2a}\right)$.

335. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$.

336. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

337. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\operatorname{sen}\frac{x}{4}\right)}$.

338. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2x \operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

339. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

340. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

341. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

342. $\lim\limits_{\alpha\to\beta} \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

343. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+2h)-2\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen} a}{h^2}$.

344. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+2h)-2\operatorname{tg}(a+h)+\operatorname{tg} a}{h^2}$.

345. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$.

346. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{tg} x}$.

347. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\operatorname{sen} x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

348. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

349. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg} 3x}-\sqrt[3]{1-\operatorname{arcsen} 3x}}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen} 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg} 2x}}$.

350*. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

---

351. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

352. $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$.

353. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

354. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

355. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

356. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

357. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

358. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

359. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

360. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

361. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

362. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

363. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x}$.

364. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

367. $\lim\limits_{x\to\infty} \{x[\ln(x+a)-\ln x]\}$.

368. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

369. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h-1}{h}$.

370. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$.

372*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} 2x}-e^{\operatorname{sen} x}}{x}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

376. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

377. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$.

378. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{th} x$.

Diversos límites

En los ejercicios 379—401 hallar los límites.

379. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(ax+1)^n}{x^n+A}$. Considerar separadamente los casos en que n es: 1) un número entero positivo, 2) un número entero negativo, 3) cero.

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^x}{a^x+1}$ $(a>0)$.

382. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0)$.

383. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

384. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

385. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$.

386. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

387. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+3h)-3\operatorname{sen}(a+2h)+3\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h^3}$.

388. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x\left(\sqrt{2\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x+4}-\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+6\operatorname{sen} x+2}\right)$.

389. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

390*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

392. $\lim\limits_{x\to\infty} (\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

393*. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

394. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right)$.

395*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

396. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)^x$ $(n>0)$.

397*. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

399. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}}$.

400. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

401. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+a\operatorname{sen} bx)^{\frac{1}{x}}$.

441. Hallar la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para las siguientes funciones:

1) $y=2x^3-x^2+1$ para $x=1$; $\Delta x=0,1$;

2) $y=\frac{1}{x}$ para $x=2$; $\Delta x=0,01$;

3) $y=\sqrt{x}$ para $x=4$; $\Delta x=0,4$.

Mostrar que cuando $\Delta x \to 0$, el límite de la referida razón en el primer caso es igual a 4, en el segundo, $-\frac{1}{4}$, en el tercero, $\frac{1}{4}$.

442. Dada la función $y = x^2$, hallar los valores aproximados de la derivada en el punto $x = 3$, poniendo sucesivamente Δx igual a: a) 0,5; b) 0,1; c) 0,01; d) 0,001.

443. $f(x)=x^2$. Hallar $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

444. $f(x)=x^3$. Hallar $f'(1)$; $f'(0)$; $f'(-\sqrt{2})$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

445. $f(x) = x^2$. ¿En qué punto $f(x) = f'(x)$?

446. Comprobar la siguiente aserción: para la función $f(x) = x^2$ es válida la relación $f'(a+b) = f'(a) + f'(b)$.

¿Es válida esta identidad para la función $f(x) = x^3$?

447. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$ para $x = 0$.

448. Hallar la derivada de la función $y = \lg x$ para $x = 1$.

449. Hallar la derivada de la función $y = 10^x$ para $x = 0$.

450. Es sabido que la función $f(0)=0$ y que existe el límite de la expresión $\frac{f(x)}{x}$ para $x \to 0$. Demostrar que este límite es igual a $f'(0)$.

451. Demostrar el siguiente teorema: si $f(x)$ y $\varphi(x)$ son iguales a cero, cuando $x = 0$ $[f(0) = 0,\ \varphi(0) = 0]$ y tienen las derivadas, para $x = 0$, siendo $\varphi'(0) \neq 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

452. Demostrar lo siguiente: si $f(x)$ tiene la derivada cuando $x = a$, se tiene

$$\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = f(a) - af'(a).$$

453. Demostrar que la derivada de una función par es una función impar, mientras que la derivada de una función impar es una función par.

Interpretación geométrica de la derivada

454. Hallar el coeficiente angular de la tangente a la parábola $y = x^2$: 1) en el origen de coordenadas; 2) en el punto (3; 9); 3) en el punto (—2; 4), 4) en los puntos de intersección de la tangente con la recta $y = 3x - 2$.

455. ¿En qué puntos es igual a 3 el coeficiente angular de la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$?

456. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^3$ 1) es paralela al eje Ox; 2) forma un ángulo de 45° con el eje Ox?

457. Una tangente a la parábola cúbica $y = x^3$ ¿puede formar un ángulo obtuso con el eje Ox?

458. ¿Qué ángulos forman al cortarse la parábola $y = x^2$ y la recta $3x - y - 2 = 0$?

459. ¿Qué ángulos forman al cortarse las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$?

460. ¿Qué ángulo forman al cortarse la hipérbola $y = 1/x$ y la parábola $y = \sqrt{x}$?

461. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3$ en el punto cuya abscisa es 2. Hallar la subtangente y la subnormal.

462. ¿Para qué valor de la variable independiente son paralelas las tangentes a las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$?

463. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2$ 1) es paralela a la recta $y = 4x - 5$; 2) es perpendicular a la recta $2x - 6y + 5 = 0$; 3) forma un ángulo de 45° con la recta $3x - y + 1 = 0$?

464. Demostrar que la subtangente correspondiente a cualquier punto de la parábola $y = ax^2$ es igual a la mitad de la abscisa del punto de tangencia. Valiéndose de esta circunstancia, formular el método para trazar la tangente a la parábola en el punto dado.

465. Demostrar que la normal a la parábola en cualquier punto que pertenezca a ésta desempeña la función de bisectriz del ángulo formado entre el radio focal del punto y la recta paralela al eje de la parábola y que pasa por el punto dado.

§ 2. Diferenciación de las funciones

Funciones exponenciales

En los ejercicios de este párrafo x, y, z, t, u, v, s son variables independientes, a, b, c, d, m, n, p, q son constantes.

466. Derivar la función:

1) $3x^2-5x+1$; 2) $x^4-\frac{1}{3}x^3+2{,}5x^2-0{,}3x+0{,}1$;

3) ax^2+bx+c; 4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$; 5) $2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$;

6) $0{,}8\sqrt[4]{y}-\frac{y^3}{0{,}3}+\frac{1}{5y^2}$; 7) $\frac{x}{n}+\frac{n}{x}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$;

8) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$; 9) $\frac{mz^2+nz+4p}{p+q}$;

10) $0{,}1t^{-\frac{2}{3}}-\frac{5{,}2}{t^{1,4}}+\frac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$; 11) $(x-0{,}5)^2$; 12) $\sqrt{x}(x^3-\sqrt{x}+1)$;

13) $(v+1)^2(v-1)$; 14) $0{,}5-3(a-x)^2$;

15) $\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$; 16) $\left(\frac{mu+n}{p}\right)^3$.

467. $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Hallar: $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

468. $f(t)=\frac{t^2-5t-1}{t^3}$. Hallar: $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

469. $f(z)=\frac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$. Hallar: $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

470. $f(x)=4-5x+2x^3-x^5$. Mostrar que

$$f'(a)=f'(-a).$$

En los ejercicios 471—489 derivar las funciones que se indican.

471. 1) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$;
2) $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$;
3) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;
4) $y=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$;
5) $y=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$;
6) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;
7) $y=(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$.

472. $y=\frac{x+1}{x-1}$. **473.** $y=\frac{x}{x^2+1}$.

474. $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$. **475.** $u=\frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$.

476. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. **477.** $z=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$.

478. $u=\frac{v^5}{v^3-2}$. **479.** $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$.

480. $y=\frac{2}{x^3-1}$. **481.** $u=\frac{v^2-v+1}{a^2-3}$.

482. $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$. **483.** $z=\frac{1}{t^2+t+1}$.

484. $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$. **485.** $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$.

486. $y=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$. **487.** $y=\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

488. $y=\frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$. **489.** $y=\frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

490. $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; hallar $f'(0)$ y $f'(1)$.

491. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; hallar $F'(0)$; $F'(1)$ y $F'(2)$

492. $F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2+1}$; hallar $F'(0)$ y $F'(-1)$.

493. $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$; hallar $s'(0)$ y $s'(2)$.

494. $y(x)=(1+x^3)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$; hallar $y'(1)$ y $y'(a)$.

495. $\rho(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$; hallar $\rho'(2)$ y $\rho'(0)$.

496. $\varphi(z)=\frac{a-z}{1+z}$; hallar $\varphi'(1)$.

497. $z(t)=(\sqrt{t^3}+1)t$; hallar $z'(0)$.

En los ejercicios 498—513 derivar las funciones que se indican

498. 1) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; 2) $(x^2+1)^4$; 3) $(1-x)^{20}$; 4) $(1+2x)^{30}$; 5) $(1-x^2)^{10}$; 6) $(5x^3+x^2-4)^5$; 7) $(x^3-x)^6$;
8) $\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^6$; 9) $s=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4$;
10) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$; 11) $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$;
12) $y=(2x^3+3x^2+6x+1)^4$.

499. $v=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. **500.** $s=\frac{t^3}{(1-t)^2}$.

501. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$. **502.** $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$.

503. $y=\sqrt{1-x^2}$. **504.** $y=\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^4$.

505. $u=\left(\frac{v}{1-v}\right)^m$. **506.** $y=\frac{2}{(x^2-x+1)^2}$.

507. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **508.** $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

509. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$. **510.** $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

511. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

512. $u=\frac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

513. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$.

514. $u(v)=(v^2+v+2)^{\frac{3}{2}}$; hallar $u'(1)$.

515. $y(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; hallar $y'(2)$.

516. $y(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; hallar $y'(0)$.

Funciones trigonométricas

En los ejercicios 517—546 derivar las funciones que se indican.

517. $y=\operatorname{sen} x+\cos x$.

518. $y=\frac{x}{1-\cos x}$.

519. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

520. $\rho=\varphi \operatorname{sen} \varphi+\cos \varphi$.

521. $z=\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}+\frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$.

522. $s=\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}$.

523. $y=\frac{x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$.

524. $y=\frac{x \operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg} x}$.

525. $y=\cos^2 x$.

526. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

527. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

528. $y=3\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^3 x$.

529. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$.

530. $y=x\sec^2 x-\operatorname{tg} x$.

531. $y=\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x$.

532. $y=\operatorname{sen} 3x$.

533. $y=a\cos\frac{x}{3}$.

534. $y=3\operatorname{sen}(3x+5)$.

535. $y=\operatorname{tg}\frac{x+1}{2}$.

536. $y=\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$.

537. $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

538. $y=\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

539. $y=\cos^3 4x$.

540. $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

541. $y=\operatorname{sen}\sqrt{1+x^2}$.

542. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$.

543. $y=(1+\operatorname{sen}^2 x)^4$.

544. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

545. $y=\cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

546. $y=\operatorname{sen}^2(\cos 3x)$.

547. Deducir las fórmulas:

$$(\operatorname{sen}^n x \cos nx)' = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos (n+1) x;$$
$$(\operatorname{sen}^n x \operatorname{sen} nx)' = n \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} (n+1) x;$$
$$(\cos^n x \operatorname{sen} nx)' = n \cos^{n-1} x \cos (n+1) x;$$
$$(\cos^n x \cos nx)' = -n \cos^{n-1} x \operatorname{sen} (n+1) x.$$

Funciones trigonométricas inversas

En los ejercicios 548—572 derivar las funciones que se indican.

548. $y=x\arcsen x$.

549. $y=\frac{\arcsen x}{\arccos x}$.

550. $y=(\arcsen x)^2$.

551. $y=x\arcsen x+\sqrt{x-1^2}$.

552. $y=\frac{1}{\arcsen x}$.

553. $y=x\operatorname{sen} x \operatorname{arctg} x$.

554. $y=\frac{\arccos x}{x}$.

555. $y=\sqrt{x}\cdot\operatorname{arctg} x$.

556. $y=(\arccos x-\arcsen x)^n$.

557. $y=\operatorname{arcsec} x$.

558. $y=\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x$.

559. $y=\frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$.

560. $y=\frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.

561. $y=\arcsen(x-1)$.

562. $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

563. $y=\operatorname{arctg} x^2$.

564. $y=\arcsen\frac{2}{x}$.

565. $y=\arcsen(\operatorname{sen} x)$.

566. $y=\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$.

567. $y=\sqrt{1-(\arccos x)^2}$.

568. $y=\arcsen\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

~~569~~. $y=\frac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsen\sqrt{x^2+2x}}$.

~~570~~. $y=\arcsen\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} x}{1-\cos\alpha \operatorname{sen} x}$.

571. $y=\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$.

572. $y=\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$.

Funciones logarítmicas

En los ejercicios 573—597 derivar las funciones que se indican.

573. $y=x^2\log_3 x$.

574. $y=\ln^2 x$.

575. $y=x\lg x$.

576. $y=\sqrt{\ln x}$.

577. $y=\frac{x-1}{\log_2 x}$.

578. $y=x\operatorname{sen} x\ln x$.

579. $y=\frac{1}{\ln x}$.
580. $y=\frac{\ln x}{x^n}$.
581. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.
582. $y=\frac{\ln x}{1+x^2}$.
583. $y=x^n \ln x$.
584. $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$.
585. $y=\ln(1-2x)$.
586. $y=\ln(x^2-4x)$.
587. $y=\ln \operatorname{sen} x$.
588. $y=\log_3(x^2-1)$.
589. $y=\ln \operatorname{tg} x$.
590. $y=\ln \arccos 2x$.
591. $y=\ln^4 \operatorname{sen} x$.
592. $y=\operatorname{arctg}[\ln(ax+b)]$.
593. $y=(1+\ln \operatorname{sen} x)^n$.
594. $y=\log_2[\log_3(\log_5 x)]$.
595. $y=\ln \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.
596. $y=\operatorname{arcsen}^2 \ln(a^3+x^3)]$.
597. $y=\sqrt[3]{\ln \operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}$.

Funciones exponenciales

En los ejercicios 598—633 derivar las funciones que se indican.

598. $y=2^x$. 599. $y=10^x$. 600. $y=\frac{1}{3^x}$.
601. $y=\frac{x}{4^x}$. 602. $y=x\cdot 10^x$. 603. $y=xe^x$.
604. $y=\frac{x}{e^x}$. 605. $y=\frac{x^3+2^x}{e^x}$. 606. $y=e^x \cos x$.
607. $y=\frac{e^x}{\operatorname{sen} x}$. 608. $y=\frac{\cos x}{e^x}$. 609. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.
610. $y=x^3-3^x$.
611. $y=\sqrt{1+e^x}$.
612. $y=(x^2-2x+3)e^x$.
613. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$.
614. $y=\frac{1-10^x}{1+10^x}$.
615. $y=\frac{e^x}{1+x^2}$.
616. $y=xe^x(\cos x+\operatorname{sen} x)$.
617. $y=e^{-x}$.
618. $y=10^{2x-3}$.
619. $y=e^{\sqrt{x+1}}$.
620. $y=\operatorname{sen}(2^x)$.
621. $y=3^{\operatorname{sen} x}$.
622. $y=a^{\operatorname{sen}^3 x}$.
623. $y=e^{\operatorname{arcsen} 2x}$.
624. $y=2^{3^x}$.
625. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.
626. $y=\operatorname{sen}(e^{x^2+3x-2})$.
627. $y=10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}$.
628. $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.
629. $y=\ln \operatorname{sen}\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.
630. $y=ae^{-b^2x^2}$.
631. $y=x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.
632. $y=Ae^{-k^2x}\operatorname{sen}(\omega x+\alpha)$.
633. $y=a^x x^a$.

Funciones hiperbólicas

En los ejercicios 634—649 derivar las funciones que se indican.

634. $y=\operatorname{sh}^3 x$.
635. $y=\ln \operatorname{ch} x$.
636. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.
637. $y=\operatorname{th}(1-x^2)$.
638. $y=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$.
639. $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.
640. $y=\sqrt{\operatorname{ch} x}$.
641. $y=e^{\operatorname{ch}^2 x}$.
642. $y=\operatorname{th}(\ln x)$.
643. $y=x\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x$.
644. $y=\sqrt[4]{(1+\operatorname{th}^2 x)^3}$.
645. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}$.
646. $y=\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.
647. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th} x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.
648. $y=\frac{1}{x}\operatorname{ch} 2x+\sqrt{x}\operatorname{sh} 2x$. 649. $y=x^2e^{3x}\operatorname{cosech} x$.

Derivación logarítmica

En los ejercicios 650—666 derivar las funciones que se indican aplicando la regla de la derivación logarítmica.

650. $y=x^{x^2}$. 651. $y=x^{x^x}$.
652. $y=(\operatorname{sen} x^{\cos x})$. 653. $y=(\ln x)^x$.
654. $y=(x+1)^{2/x}$. 655. $y=x^3e^{x^2}\operatorname{sen} 2x$.
656. $y=\frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.
657. $y=x^{\ln x}$.
658. $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.
659. $y=\sqrt{x\operatorname{sen} x\sqrt{1-e^x}}$.
660. $y=\sqrt{\frac{1-\operatorname{arcsen} x}{1+\operatorname{arcsen} x}}$.
661. $y=x^{\frac{1}{x}}$.
662. $y=x^{\operatorname{sen} x}$.
663. $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.
664. $y=2x^{\sqrt{x}}$.
665. $y=(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$.
666. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

Funciones diversas

En los ejercicios 667—770 derivar las funciones que se indican.

667. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$.
668. $y=a\operatorname{tg}\left(\frac{x}{k}+b\right)$.
669. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$.
670. $y=\operatorname{arctg}(x^2-3x+2)$.

671. $y = \lg(x - \cos x)$.

672. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$.

673. $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{5} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

674. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$.

675. $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$.

676. $y = \operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x}$

677. $y = y^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$

678. $y = e^{-x^2}\ln x$.

679. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

680. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

681. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.

682. $y = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}$.

683. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

684. $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

685. $y = \operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

686. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$.

687. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

688. $y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

689. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$.

690. $y = \cos 2x \ln x$.

691. $y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

692. $y = \operatorname{arcsen}(n \operatorname{sen} x)$.

693. $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen} x}$.

694. $y = \frac{1}{18}\operatorname{sen}^6 3x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^8 3x$.

695. $y = x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$.

696. $y = \cos\frac{\operatorname{arcsen} x}{2}$.

697. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

698. $\arccos\sqrt{1-3x}$.

699. $y = \operatorname{sen}^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$.

700. $y = \log_3(x^2 - \operatorname{sen} x)$.

701. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

702. $y = \ln\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

703. $y = x\operatorname{arcsen}(\ln x)$.

704. $y = \operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

705. $y = \cos x\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$.

706. $y = 0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \operatorname{sen} 0{,}8x\right)^2$.

707. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$.

708. $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

709. $y = \ln\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$.

710. $y = \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$.

711. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$.

712. $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

713. $y = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

714. $y = x^3\operatorname{arctg} x^3$.

715. $y = \frac{\ln\operatorname{sen} x}{\ln\cos x}$.

716. $y = \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$.

717. $y = \frac{\operatorname{arcsen} 4x}{1-4x}$.

718. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$.

719. $y = \ln\frac{1-e^x}{e^x}$

720. $y = 10^{x\operatorname{tg} x}$.

721. $y = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x^2$.

722. $y = \frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

723. $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.

724. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

725. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$,

726. $y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

727. $y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{2\operatorname{sen}^2 x\cos x}$.

728. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

729. $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a\arccos\frac{x}{a}$.

730. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$.

731. $y = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

732. $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

733. $y = e^{ax}(a\operatorname{sen} x - \cos x)$.

734. $y = xe^{1-\cos x}$.

735. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$.

736. $y = e^x(\operatorname{sen} 3x - 3\cos 3x)$.

737. $y = 3x^3\operatorname{arcsen} x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

738. $y = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

739. $y = 2\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$.

740. $y = \ln(e^x\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} x)$.

741. $y = \frac{1 + x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

742. $y = \frac{1}{\cos(x - \cos x)}$.

743. $y = e^x\operatorname{sen} x\cos^3 x$.

744. $y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$.

745. $y = x - \ln(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$.

746. $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $y = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$.

748. $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x\ln(1 + \operatorname{sen} x) - x$.

749. $y = 2\ln(2x - 3\sqrt{1-4x^2}) - 6\operatorname{arcsen} 2x$.

750. $y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$.

751. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

752. $y = \ln(x \operatorname{sen} x\sqrt{1-x^2})$. 753. $y = x\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen} x$.

754. $y = \frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$. 755. $y = \sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}$.

756. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}$.

757. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{4\cos^4 x} + \frac{3\operatorname{sen} x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

758. $y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$. 759. $y = \frac{(1-x^2)\,e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

760. $y = x\sqrt{(x^2+a^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

~~761.~~ $y = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$.

762. $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

763. $y = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

764. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

~~765.~~ $y = \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

~~766.~~ $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$. ~~767.~~ $y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

~~768.~~ $y = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

~~769.~~ $y = \arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

770. $y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

771. Demostrar que la función $y = \ln\frac{1}{1+x}$ satisface la relación $xy' + 1 = e^y$.

~~772.~~ Demostrar que la función

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

satisface la relación $2y = xy' + \ln y'$.

773. Demostrar que la función $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ satisface la relación $(1-x^2)\,y' - xy = 1$.

~~774*.~~ Calcular las sumas
a) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$;
b) $2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}$.

Funciones inversas

775. Supongamos que la regla para derivar la función potencial fue establecida sólo para un exponente entero positivo. Deducir la fórmula para derivar la raíz, aplicando la regla para derivar la función inversa.

776. $x = e^{\operatorname{arcsen} y}$; hallar la expresión para $\frac{dy}{dx}$ mediante y, mediante x.

777. $t = 2 - 3s + s^3$; expresar $\frac{ds}{dt}$ mediante s.

778. $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; comprobar la relación $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{du} = 1$.

779. Teniendo en cuenta que las funciones $\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ y $\operatorname{sen}^2 x$ son recíprocamente inversas y que $(\operatorname{sen}^2 x)' = \operatorname{sen} 2x$, hallar $(\operatorname{arcsen}\sqrt{x})'$.

780. Designemos la función, inversa a la función potencial exponencial $y = x^x$, por el símbolo $\alpha(x)$, es decir, supongamos que de $y = x^x$ se deduce $x = \alpha(y)$. Hallar la fórmula para la derivada de la función $y = \alpha(x)$.

781. Las funciones que son inversas a las funciones hipebólicas son designadas por los símbolos $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$. Hallar las derivadas de estas funciones.

782. $s = te^{-t}$; hallar $\frac{dt}{ds}$.

783. $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$. Expresar $\frac{dx}{dy}$ mediante x, mediante y. Mostrar que es válida la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1$.

784. $x = y^3 - 4y + 1$. Hallar $\frac{dy}{dx}$.

785. $t = \operatorname{arcsen} 2^s$. Hallar la expresión para $\frac{ds}{dt}$ mediante s, mediante t.

786. Comprobar la validez de la relación $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$, si x e y se relacionan por medio de la dependencia:

1) $y = x^2 + ax + b$; 2) $y = x^{-n}$;

3) $y = \ln (x^2 - 1)$.

Funciones dadas en forma implícita

787. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ son idénticamente iguales entre sí.

788. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x\,(2\operatorname{sen} x + 1)}{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x$$

son idénticamente iguales entre sí.

789. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $(1, \sqrt{2})$?

790. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la hipérbola $xy = a$ $(a = 0)$ en el punto $(a, 1)$?

791. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 17$ en el punto $(2, 1)$?

En los ejercicios 792—812 hallar las derivadas de las funciones y dadas en forma implícita.

792. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **793.** $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

794. $x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$. **795.** $y^2 \cos x = a^2 \operatorname{sen} 3x$.

796. $y^3 - 3y + 2ax = 0$. **797.** $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

798. $x^4 + y^4 = x^2y^2$. **799.** $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$.

800. $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x + y)$. **801.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

802. $2y \ln y = x$. **803.** $x - y = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y$.

804. $x^y = y^x$. **805.** $y = \cos(x + y)$.

806. $\cos(xy) = x$. **807.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

808. $y = 1 + xe^y$.

809. $x \operatorname{sen} y - \cos y + \cos 2y = 0$.

810. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

811. $y \operatorname{sen} x - \cos(x - y) = 0$.

812. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

813. Mostrar que la función y definida por la ecuación $xy - \ln y = 1$, satisface también la relación

$$y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Aplicaciones de la derivada

814. En la parábola $y = x^2$ se han marcado dos puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Por estos puntos pasa la secante. ¿En qué punto de la parábola la tangente a ésta es paralela a la secante trazada?

815. Una cuerda está trazada de manera que pasa por el foco de la parábola y es perpendicular al eje de ésta. Por los puntos de intersección de la cuerda y la parábola pasan tangentes. Demostrar que éstas se cortan en ángulo recto.

816. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la hipérbola $y = 1/x$ en el punto cuya abscisa es $x = -1/2$. Hallar la subtangente y la subnormal.

817. Mostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $y = \frac{a}{x}$ comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

818. Mostrar que respecto a la hipérbola $xy = a$ el área del triángulo formado por cualquier tangente y los ejes de coordenadas es igual al cuadrado del semieje de la hipérbola.

819. Un punto móvil se desplaza sobre una recta de modo que su distancia s del punto inicial al cabo de t s es igual a $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) ¿En qué momentos se encontró en el punto inicial el punto referido? b) ¿En qué momentos fue igual a cero su velocidad?

820. Un cuerpo cuya masa es de 3 kg efectúa movimiento rectilíneo de acuerdo con la ley

$$s = 1 + t + t^2,$$

s viene expresada en centímetros, t, en segundos. Determinar la energía cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ del cuerpo al cabo de 5 s al iniciar el movimiento.

821. El ángulo α de giro de una polea en función del tiempo t viene expresado por la función $\alpha = t^2 + 3t - 5$. Hallar la velocidad angular para $t = 5$ s.

822. Una rueda gira de modo que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado de tiempo. La primera vuelta ha sido realizada en 8 s. Hallar la velocidad angular ω al cabo de 32 s al comenzar el movimiento.

823. El ángulo θ, que se forma al dar una vuelta una rueda, al cabo de t segundos, es igual a $\theta = at^2 - bt + c$, donde a, b, c son constantes positivas. Hallar la velocidad angular ω de la rotación de la rueda. ¿En qué momento es igual a cero la velocidad angular?

1670. Hallar los puntos del extremo y los de inflexión de la gráfica de la función

$y=\int_0^x (x^2-3x+2)\,dx$. Construir la gráfica de esta función.

1671. Siguiendo las gráficas de las funciones presentadas en las fig. 37 y 38, averiguar la forma de las gráficas de sus funciones primitivas.

Fórmula de Newton — Leibniz

1672. Calcular las integrales:

1) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_4^1 \frac{dx}{x^3}$; 3) $\int_1^9 3\sqrt{x}\,dx$; 4) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$;

5) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx$; 6) $\int_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\,dx$; 7) $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax}}$;

8) $\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$; 9) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} (a>0,\ b>0)$; 10) $\int_{z_0}^{z_1} (\sqrt{z}-1)^2\,dz$.

1673. Calcular las integrales:

1) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$; 2) $\int_0^\pi \cos x\,dx$

(interpretar geométricamente el resultado obtenido),

3) $\int_0^3 e^x\,dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$; 5) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 6) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1674. La función $f(x)$ tiene valores iguales en los puntos $x=a$ y $x=b$, y una derivada continua. ¿A qué es igual la integral $\int_a^b f'(x)\,dx$?

1675. La tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ en el punto cuya abscisa es $x=a$, forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje de abscisas, mientras que en el punto cuya abscisa es $x=b$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. Calcular $\int_a^b f''(x)\,dx$ y $\int_a^b f'(x)\,f''(x)\,dx$; $f''(x)$ se supone continua.

Capítulo VI

Integral indefinida. Cálculo integral

§ 1. Métodos más simples de integración

En los ejercicios 1676—1702 hallar las integrales, usando la tabla de integrales y aplicando las reglas elementales para la integración.

1676. $\int \sqrt{x}\,dx$. **1677.** $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$. **1678.** $\int \frac{dx}{x^2}$.

1679. $\int 10^x\,dx$. **1680.** $\int a^x e^x\,dx$. **1681.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

1682. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$. **1683.** $\int 3{,}4x^{-0{,}17}\,dx$. **1684.** $\int (1-2u)\,du$.

1685. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$. **1686.** $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$.

1687. $\int (2x^{-1{,}2}+3x^{-0{,}8}-5^{0{,}38})\,dx$.

1688. $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$. **1689.** $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$.

1690. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **1691.** $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$. **1693.** $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$.

1694. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$. **1695.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 x}\,dx$.

1696. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$. **1697.** $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

1698. $\int 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\,dx$. **1699.** $\int \frac{(1+2x^2)\,dx}{x^2(1+x^2)}$.

1700. $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$. 1701. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\operatorname{sen}^2 x}$.

1702. $\int (\operatorname{arcsen} x+\arccos x)\,dx$.

En los ejercicios 1703—1780 hallar las integrales, aplicando el teorema sobre la invariancia de las fórmulas de integración.

1703. $\int \operatorname{sen} x\, d(\operatorname{sen} x)$. 1704. $\int \operatorname{tg}^3 x\, d(\operatorname{tg} x)$.

1705. $\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$. 1706. $\int (x+1)^{15}\,dx$.

1707. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. 1708. $\int \frac{dx}{(a+bx)^c}\ (c\neq 1)$.

1709. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$. 1710. $\int \sqrt{8-2x}\,dx$.

1711. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}\,dx$. 1712. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

1713. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$. 1714. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx$.

1715. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. 1716. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4+x^5}}$.

1717. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$. 1718. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$.

1719. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$. 1720. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x}$.

1721. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}$. 1722. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} 2x\,dx$.

1723. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$. 1724. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{1+x^2}$.

1725. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)^3\sqrt{1-x^2}}$. 1726. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

1727. $\int \cos 3x\, d(3x)$. 1728. $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}$.

1729. $\int \cos 3x\,dx$. 1730. $\int (\cos\alpha-\cos 2x)\,dx$.

1731. $\int \operatorname{sen}(2x-3)\,dx$. 1732. $\int \cos(1-2x)\,dx$.

1733. $\int \left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2}dx$. 1734. $\int e^x(\operatorname{sen} e^x)\,dx$.

1735. $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$. 1736. $\int \frac{d(\operatorname{arcsen} x)}{\operatorname{arcsen} x}$. 1737. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}$.

1738. $\int \frac{dx}{2x-1}$. 1739. $\int \frac{dx}{cx+m}$. 1740. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

1741. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$. 1742. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$. 1743. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+a^2}$.

1744. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 1745. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. 1746. $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$.

1747. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)\,dx$. 1748. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$. 1749. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

1750. $\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx$. 1751. $\int e^{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x)$.

1752. $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$. 1753. $\int a^{3x}\,dx$. 1754. $\int a^{-x}\,dx$.

1755. $\int e^{-3x+1}\,dx$. 1756. $\int e^{x^2}x\,dx$. 1757. $\int e^{-x^3}x^2\,dx$.

1758. $\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$. 1759. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.

1760. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. 1761. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 1762. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$.

1763. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. 1764. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$. 1765. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^4}}$.

1766. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4}$. 1767. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$. 1768. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}$.

1769. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$. 1770. $\int \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{a^2+\operatorname{sen}^2\alpha}$.

1771. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$. 1772. $\int (e^x+1)^3\,dx$.

1773. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 1774. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$.

1775. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. 1776. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$.

1777. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$. 1778. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$.

1779. $\int \frac{2x-\sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 1780. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.

En los ejercicios 1781—1790 hallar las integrales, despejando la parte entera de la fracción bajo el signo de integral.

1781. $\int \frac{x}{x+4}\,dx$. 1782. $\int \frac{x}{2x+1}\,dx$. 1783. $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx$.

1784. $\int \frac{3+x}{3-x}\,dx$. 1785. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x-2}$. 1786. $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx$.

1787. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}\,dx$. 1788. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$. 1789. $\int \frac{x^4}{1-x}\,dx$.

1790. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$.

En los ejercicios 1791—1807 hallar las integrales aplicando el método de descomposición de la expresión integrando y el método para despejar el cuadrado perfecto.

1791. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$. 1792. $\int \frac{dx}{x(x+1)}$. 1793. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$.

1794. $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$. 1795. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$. 1796. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

1797. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$. 1798. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$. 1799. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

1800. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$. 1801. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$. 1802. $\int \frac{dx}{x-x^2-2{,}5}$.

1803. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 1804. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$.

1805. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$. 1806. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

1807. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

En los ejercicios 1808—1831 hallar las integrales aplicando las fórmulas trigonométricas para transformar la expresión integrando.

1808. $\int \cos^2 x\,dx$. 1809. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$. 1810. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1811. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$. 1812. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$. 1813. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$.

1814. $\int (\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)\,dx$. 1815. $\frac{\cos 2x\,dx}{1+\operatorname{sen} x\cos x}$.

1816. $\int \cos x\operatorname{sen} 3x\,dx$. 1817. $\int \cos 2x\cos 3x\,dx$.

1818. $\int \operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 5x\,dx$. 1819. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$.

1820. $\int \frac{dx}{\cos x}$. 1821. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$. 1822. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$.

1823. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}$. 1824. $\int \frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}\,d\alpha$. 1825. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1826. $\int \cos^3 x\,dx$. 1827. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. 1828. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

1829. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$. 1830. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. 1831. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$.

§ 2. Métodos principales de integración

Integración por partes

En los ejercicios 1832—1868 hallar las integrales.

1832. $\int x\operatorname{sen} 2x\,dx$. 1833. $\int x\cos x\,dx$. 1834. $\int xe^{-x}\,dx$.

1835. $\int x3^x\,dx$. 1836. $\int x^n\ln x\,dx$. $(n\neq -1)$.

1837. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$. 1838. $\int \arccos x\,dx$. 1839. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

1840. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. 1841. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$. 1842. $\int x\cos^2 x\,dx$.

1843. $\int \frac{\lg x}{x^3}\,dx$. 1844. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. 1845. $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1846. $\int \ln(x^2+1)\,dx$. 1847. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

1848. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 1849. $\int x^2\ln(1+x)\,dx$.

1850. $\int x^2e^{-x}\,dx$. 1851. $\int x^3e^x\,dx$. 1852. $\int x^2a^x\,dx$.

1853. $\int x^3\operatorname{sen} x\,dx$. 1854. $\int x^2\cos^2 x\,dx$. 1855. $\int \ln^2 x\,dx$.

1856. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$. 1857. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$. 1858. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$.

1859. $\int (\operatorname{arctg} x)^2 x\,dx$. ~~1860.~~ $\int e^x\operatorname{sen} x\,dx$.

~~1861.~~ $\int e^{3x}(\operatorname{sen} 2x-\cos 2x)\,dx$. ~~1862.~~ $\int e^{ax}\cos nx\,dx$.

1863. $\int \operatorname{sen} \ln x \, dx.$ **1864.** $\int \cos \ln x \, dx.$ **1865*.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1866*. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx.$ **1867.** $\int \frac{x^2 e^x\,dx}{(x+2)^2}.$ **1868.** $\int x^2 e^x \operatorname{sen} x\,dx.$

Cambio de variable

En los ejercicios 1869—1904 hallar las integrales.

1869. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (sustituyendo $x+1=z^2$).

1870. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}.$ **1871.** $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx.$ **1872.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$

1873. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx.$ **1874.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$ **1875.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx.$

1876. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx.$ **1877.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$ **1878.** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}.$

1879. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (sustituyendo $x=z^6$).

1880. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}-1)}.$ **1881.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$ **1882.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx.$

1883. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (sustituyendo $e^x+1=z^4$).

1884. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$ **1885.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x}\,dx.$

1886. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x\,dx.$

1887. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}\,dx.$ **1888.** $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}.$ **1889.** $\int \frac{x^5\,dx}{(x^2-4)^2}.$

1890. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$

$\left(\text{sustituyendo } x=\frac{1}{z}, \text{ o } x=a \operatorname{tg} z, \text{ o } x=a \operatorname{sh} z\right).$

1891. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (sustituyendo $x=a \operatorname{sen} z$).

1892. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

$\left(\text{sustituyendo } x=\frac{1}{z}, \text{ o } x=\frac{a}{\cos z}, \text{ o } x=a \operatorname{ch} z\right).$

1893. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx.$ **1894.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

1895. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$ **1896.** $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx.$

1897. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$ **1898.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

1899. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}.$ **1900.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

1901. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}.$ **1902*.** $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}.$

1903*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ **1904*.** $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}.$

En los ejercicios 1905—1909 hallar las integrales efectuando primero el cambio de variable y luego integrando por partes.

1905. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ **1906.** $\int \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}\,dx.$

1907. $\int \frac{\arcsen x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$ **1908.** $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

1909. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}\,dx.$

Diversos problemas

En los ejercicios 1910—2011 hallar las integrales.

1910. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx.$ **1911.** $\int (1+e^{3x})^2 e^{3x}\,dx.$

1912. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **1913.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\cos x}}\,dx.$

1914. $\int \sqrt{1-e^x}\,e^x\,dx.$ **1915.** $\int x\cos x^2\,dx.$

1916. $\int (2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}}\,x^{\frac{1}{3}}\,dx.$ **1917.** $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx.$

1918. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}.$ **1919.** $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$

1920. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}.$ **1921.** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

1922. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx.$ **1923.** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

1924. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$.

1925. $\int \frac{\ln x\, dx}{x(1-\ln^2 x)}$.

1926. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\, dx$.

1927. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2}\, dx$.

1928. $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi}$.

1929. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\, dx$.

1930. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x\, dx}{\cos^6 x}$.

1931. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\, \sec^4 x\, dx$.

1932. $\int (1-\operatorname{tg} 3x)^2\, dx$.

1933. $\int \frac{x^3\, dx}{x+1}$.

1934. $\int \frac{x\, dx}{(x-1)^3}$.

1935. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2+4x}}$.

1936. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+2x}}$.

1937. $\int x\sqrt{a+x}\, dx$.

1938. $\int (\sqrt{\operatorname{sen} x}+\cos x)^2\, dx$.

1939. $\int a^{mx} b^{nx}\, dx$.

1940. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$.

1941. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

1942. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

1943. $\int \frac{(8x-11)\, dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

1944. $\int \frac{(x+2)\, dx}{x^2+2x+2}$.

1945. $\int \frac{(x-3)\, dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

1946. $\int \frac{(3x-1)\, dx}{4x^2-4x+17}$.

1947. $\int \frac{(3x-1)\, dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1948. $\int \frac{(x-2)\, dx}{x^2-7x+12}$.

1949. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\, dx$.

1950. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\, dx$.

1951. $\int \frac{(4-3x)\, dx}{5x^2+6x+18}$.

1952. $\int \frac{(2-5x)\, dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

1953. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{2x+3}}$.

1955. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\, dx$.

1956. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

1957. $\int x \operatorname{sen} x \cos x\, dx$.

1958. $\int x^2 \cos \omega x\, dx$.

1959. $\int e^{2x} x^3\, dx$.

1960. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\, dx$.

1961. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \operatorname{sen} x}\, dx$.

1962. $\int \frac{x^7\, dx}{(1+x^4)^2}$.

1963. $\int \frac{\cos^2 3x}{\operatorname{sen} 3x}\, dx$.

1964. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} 3x}$.

1965. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{4-\cos^2 2x}$.

1966. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1967. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx$.

1968. $\int e^{e^x+x}\, dx$.

1969. $\int e^{2x^2+\ln x}\, dx$.

1970. $\int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}}\, dx$.

1971. $\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

1972. $\int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$.

1973. $\int e^x \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

1974. $\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)\, dx}{\operatorname{sen} 2x}$.

1975. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\, dx$.

1976. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi}$.

1977. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\operatorname{sen} x}$.

1978. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)}\, dx$.

1979. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen} x}\, dx$.

1980. $\int \frac{\ln \ln x}{x}\, dx$.

1981. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$.

1982. $\int e^{-x^2} x^5\, dx$.

1983. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

1984. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

1985. $\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{x}\, dx$.

1986. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$.

1987. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\, dx$.

1988. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\, dx$.

1989. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$.

1990. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

1991. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\, dx$.

1992. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.

1993. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

1994. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\, dx$.

1995*. $\int \frac{x^7\, dx}{(1-x^2)^5}$.

1996. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}$.

1997. $\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}\, dx$.