 MI, 17/12/2015

1)

Buscamos una base de X:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_1+F_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ y+2t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t \text{ libre} \\ z \text{ libre} \\ y=-2t \end{cases}$$

$x = y-z-t = -z-3t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-3t \\ -2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego una base de X es $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,

$\dim X = 2$.

2) Buscamos la base de Y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_1+F_2} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 3 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+3y-z+3t=0 \\ 3y+4t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z,t \text{ libres} \\ y=-\frac{4}{3}t \end{cases}$$

$x = 3y-z+3t = -z + (3-4)t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-t \\ -\frac{4}{3}t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego una base de Y es $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$\dim Y = 2$

3) Buscamos la base de $X \cap Y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y + 2t = 0 \\ -2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ z \text{ libre} \\ y = -2t = 0 \\ x = y - z - t = -z \end{cases} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: Una base de $X \cap Y$ es $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$\dim (X \cap Y) = 1$.

2) a) Buscamos autovalores de A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$-3(3-\lambda) + 2(-1-\lambda) + 4(1-\lambda) + 2\cdot(-2)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 \cdot(-3)$$

$$= (\lambda^2-1)(3-\lambda) - 9 + 3\lambda - 2 - 2\lambda + 4 - 4\lambda + 4 + 6 =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 - 3\lambda + 10 - 9 - 2 + 4 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)\lambda.$$

Los autovalores de A son: $0, 1, 2$.

A es 3×3, hay 3 autovalores distintos

$\Rightarrow A$ es diagonalizable.

b) Buscamos los correspondientes autovectores: $(A - \lambda_j I)\vec{v}_j = \vec{0}$.

$\lambda_1 = 0 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ponemos $P = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Entonces $AP = (\lambda_1 \vec{v}_1 | \lambda_2 \vec{v}_2 | \lambda_3 \vec{v}_3) =$

$= P \cdot D$, donde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

3) $v(t) = (t+1)^{-2} + At \Rightarrow$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)\,ds = 1 - \frac{1}{t+1} + \frac{At^2}{2} + x_0.$$

$x(2) = x(0) \Rightarrow 2A - \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow 2A = -\frac{2}{3}; \; A = -\frac{1}{3}.$

$x(1) = x_0 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = x_0 + \frac{1}{3}$

$x(0) = x_0.$

El desplazamiento durante el primer segundo es $x(1) - x(0) = \frac{1}{3}.$

La distancia recorrida se calcula como $|x(t_0) - x(0)| + |x(1) - x(t_0)|$, donde $t_0 \simeq 0'8637$ es la única raíz de la ecuación $\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{t}{3} = 0$ en el intervalo $[0,1]$.

4). $f(x,y) = xy + x$; $g(x,y) = x^2+y^2-1$.

Calcular extremos de f sobre la curva $g(x,y)=0$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y+1 \\ x \end{pmatrix} ; \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$$

en la curva: $y \neq 0$.

1) $\lambda \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$\begin{cases} y+1 = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y+1}{\cancel{x}} = \frac{x}{y} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+y = x^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y^2+y = 1-y^2$$

$$2y^2+y-1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

Se obtienen 3 puntos:

$$(0,-1), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

2) $\lambda = 0 \Rightarrow y = -1,\ x = 0. \Rightarrow (x,y) = (0,-1).$

Todos los extremos condicionales de f sobre la curva $g(x,y)=0$ se encuentran entre los puntos

$$(0,-1), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(x,y)	$f(x,y) = x(y+1)$
$(0,-1)$	0
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Respuesta: $\max\limits_{x^2+y^2=1} f(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(\text{en } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$,

$\min\limits_{x^2+y^2=1} f(x,y) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(\text{en } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{0+0}{1+0} = 0;$$ porque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$

para todo $a > 0$.

b) $$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \frac{(\log x)^2}{2} + C.$$

$t = \log x$

$dt = \frac{dx}{x}$