JORNADA 4 / UAM *vs* UPM

Problema 1.

En un tablero infinito escogemos un cuadrado de $n \times n$ casillas. En toda casilla de este cuadrado ponemos o no una ficha, de modo que en total se colocan exactamente k fichas. Un movimiento consiste en "hacer saltar" una ficha dos casillas en dirección vertical u horizontal hasta una casilla vacía (no necesariamente dentro del cuadrado), por encima de otra ficha adyacente. Tras realizar el movimiento, se elimina la ficha sobrepasada. El juego termina cuando no se puede realizar ningún movimiento. Se dice que la posición inicial es ganadora si se puede hacer una seria de movimientos para que el juego termine con una única ficha en el tablero.

Supón que $k = 2023$ y que la posición inicial es ganadora. ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar n?

Para este valor n, ¿cuánto puede valer k como máximo para que exista una posición inicial ganadora?

Problema 2.

Encontrad todos los enteros positivos (a, b, n, x) tales que

$$a^n - b^n = 2^x.$$

Problema 3.

La sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida como

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Sean $i, j, a, b \in \mathbb{Z}^+$. Demostrad que, si se verifica

$$\frac{F_{i-1} \cdot a + F_i}{F_i \cdot a + F_{i+1}} = \frac{F_{j-1} \cdot b + F_j}{F_j \cdot b + F_{j+1}},$$

entonces $i = j$ y $a = b$.