Ecuaciones diferenciales y aplicaciones **Examen final ordinario, 26/05/2022**

Grado de Matemáticas y Doble Grado

Departamento de Matemáticas, UAM

La nota N se va a calcular a partir de los puntos P obtenidos según la fórmula

$$N = \text{mín}\left(K \cdot \left(\frac{P}{10}\right)^{\eta}, 10\right)$$

donde el coeficiente $K \geq 10$ y el exponente $\eta \in (0, 1]$ se determinarán después de ver vuestros exámenes.

---

1. (2 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (es decir, abierto y conexo). Sean u, v funciones armónicas en Ω. Supongamos que la función $\text{mín}(u, v)$ es subarmónica en Ω. Demostrar que $u \leq v$ en Ω o $v \leq u$ en Ω.

SOL: Supongamos que $x_0 \in \Omega$ y $u(x_0) \leq v(x_0)$. Afirmamos que para toda bola cerrada $\bar{B}_r(x_0)$, centrada en x_0 y contenida en Ω, se tiene $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in \bar{B}_r(x_0)$. Efectivamente, si $0 < \rho \leq r$, entonces

$$⨏_{\partial B(x_0,\rho)} u d\sigma = u(x_0) \leq ⨏_{\partial B(x_0,\rho)} \text{mín}(u, v) d\sigma.$$

Luego

$$⨏_{\partial B(x_0,\rho)} [u - \text{mín}(u, v)] d\sigma \leq 0.$$

Como $u - \text{mín}(u, v)$ es continua y no negativa, se sigue que $u = \text{mín}(u, v)$ en toda la esfera $\partial B(x_0, \rho)$, es decir, $u \leq v$ en $\partial B(x_0, \rho)$. Como ρ es arbitrario, $u \leq v$ en $B(x_0, r)$.

Ponemos ahora $K = \{x \in \Omega : u(x) \leq v(x)\}$. Como la desigualdad es no estricta, K es relativamente cerrado en Ω. Por lo que acabamos de ver, K es abierto. Como $x_0 \in K$ y Ω es conexo, se sigue que $K = \Omega$, es decir, $u \leq v$ en Ω.

En el caso cuando $u(x_0) > v(x_0)$, razonamos de la misma manera, intercambiando los papeles de u y v.

---

2. (2,5 puntos) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una solución de la ecuación no lineal

$$\begin{cases} \Delta u = \varphi \circ u & \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f, \end{cases}$$

donde φ es continua en $\mathbb{R}$ y f es continua en $\partial\Omega$. Supongamos que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $\varphi(x) < 0$ si $x < a$ y $\varphi(x) > 0$ si $x > b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Demostrar que $A \leq u(x) \leq B$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, donde

$$A = \text{mín}\left(\text{mín}_{\partial\Omega} f,\, a\right), \quad B = \text{máx}\left(\text{máx}_{\partial\Omega} f,\, b\right).$$

SOL: Como Ω es acotado, u alcanza tanto el máximo como el mínimo sobre el compacto $\overline{\Omega}$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos, por ejemplo, que $\text{máx}_{\overline{\Omega}} u > B$. Como $f \leq B$, se sigue que el máximo de f se alcanza en algún punto q de Ω, es decir, en un punto del interior. En este punto, la matriz Hessiana

$$D^2 f(q) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q)\right]_{i,j=1}^n$$

es no positiva (recordar que u es de clase C^2 en Ω). Luego $\Delta u(q) = \operatorname{traza} D^2 f(q) \leq 0$. Por otro lado, $\Delta u(q) = \varphi(u(q)) > 0$, porque $u(q) > B \geq b$. Esta contradicción demuestra que en realidad, $\max_{\overline{\Omega}} u \leq B$. Un argumento completamente análogo demuestra que $\min_{\overline{\Omega}} u \geq A$. Por tanto, $A \leq u \leq B$ en $\overline{\Omega}$.

---

3. (2,5 puntos)

a) Supongamos que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que para todo k entero no negativo, existen constantes $C_k, M_k > 0$ tales que $|g^{(k)}(x)| \leq C_k(1 + |x|^{M_k})$, $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $gf \in S$ para toda función $f \in S$, donde S es la clase de Schwartz de funciones en $\mathbb{R}$.

b) Utilizando la transformada de Fourier, demostrar que para cualquier función $\varphi \in S(R)$, la ecuación diferencial con retardo

$$u(t-1) + u''(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

tiene una única solución $u \in S$.

SOL: a) Sea f una función de clase S. Entonces gf es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, porque $g, f \in S$. Para todo k, existe un m tal que $|g^{(\ell)}(x)| \leq C'_k(1 + |x|)^m$, $x \in \mathbb{R}$, si $0 \leq \ell \leq k$. Luego para todo n,

$$|(1+|x|)^n (gf)^{(k)}(x)| = \Big|\sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} g^{(\ell)}(x) f^{(k-\ell)}(x)\Big| \leq C'_k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (1+|x|)^{m+n} |f^{(k-\ell)}(x)| < C''_n,$$

porque $\sup_x (1+|x|)^{m+n} |f^{(k-\ell)}(x)| < \infty$ para m, n, k, ℓ cualesquiera. Por lo tanto, $gf \in S$.

b) Si $u \in S$, entonces $u(t-1)$ y u'' también pertenecen a S. Aplicando la transformada de Fourier, obtenemos

$$(e^{-i\xi} - \xi^2)\hat{u}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi).$$

Ponemos $g(\xi) = \frac{1}{e^{-i\xi} - \xi^2}$. Como $e^{-i\xi} - \xi^2$ no se anula en $\mathbb{R}$, g es una función de clase C^∞. Está claro que $g^{(k)}(\xi) = \frac{Q_k(\xi, e^{-i\xi})}{(e^{-i\xi} - \xi^2)^{k+1}}$, donde $Q_k(z, t)$ es un polinomio en dos variables con coeficientes complejos (esto se obtiene por inducción en k). Observamos que $|e^{-i\xi} - \xi^2| \geq \varepsilon > 0$ para todo ξ real. Por tanto, para cualquier k, existen números C_k, M_k tales que $|g^{(k)}(\xi)| \leq C_k(1 + |\xi|)^{M_k}$.

La función $1/g(\xi) = e^{-i\xi} - \xi^2$ satisface estimaciones $|(1/g)^{(k)}(\xi)| \leq \tilde{C}_k(1 + |\xi|^2)$, luego $1/g \in S$.

Si u satisface la ecuación, entonces $\hat{u} = g\hat{\varphi}$. Esto define de manera única $\hat{u}$, lo que nos da la unicidad de la solución. Por otro lado, si definimos $\hat{u} = g\hat{\varphi}$, entonces por el apartado a), $\hat{u}$ es de clase S, y luego existe una $u \in S$, cuya transformada de Fourier es $\hat{u}$. Esto demuestra la existencia de la solución.

---

4. (3 puntos) Sea K un compacto métrico, y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $C_{\mathbb{R}}(K)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ para todo $x \in K$, donde g es una función en K.

a) Dar ejemplos cuando la convergencia es uniforme, y cuando no lo es.

b) Dar ejemplos cuando $g \in C_{\mathbb{R}}(K)$ y, sin embargo, la convergencia no es uniforme.

c) Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Suponiendo que $f_n \to g$ uniformemente, demostrar que esta familia de funciones es pre-compacta.

d) Demostrar que si la familia $\mathcal{F}$ es pre-compacta, entonces $f_n \to g$ uniformemente.

SOL: En a) y b), escogemos como K el intervalo $[0, 1]$.

a) Las funciones $f_n(x) = x + \frac{x^2}{n}$, $n \geq 1$, tienden uniformemente en $[0, 1]$ a la función $g(x) = x$, porque $\sup_K |f_n - g| = 1/n \to 0$, $n \to \infty$. Por otro lado, las funciones $f_n(x) = \arctan(nx)$ tienden puntualmente a la función

$$g(x) = \begin{cases} -\pi/2, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\pi/2, & x < 0, \end{cases}$$

que no es continua en $[-1, 1]$. Por tanto, la convergencia no es uniforme.

b) Ponemos $f_n(0) = f_n(2/n) = f_n(1) = 0$, $f_n(1/n) = 1$ y extendemos f_n linealmente a cada uno de los intervalos $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$, $[2/n, 1]$. Entonces cada función f_n es lineal a trozos y continua en $[0, 1]$. Es fácil ver que para todo $x \in [0, 1]$, existe el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Es decir, f_n tienden puntualmente en $[0, 1]$ a la función continua $g(x) = 0$. Como $\max_{[0,1]} |f_n - g| = 1 \not\to 0$ $(n \to \infty)$, la convergencia no es uniforme.

c) Sea K un compacto métrico arbitrario. Supongamos que f_n tienden uniformemente a la función g; luego g es continua en K. Tenemos que ver que toda sucesión $\{h_k\}$ de elementos de la familia $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión, que converge en $C(K)$. En nuestro caso, por la definición de $\mathcal{F}$, $h_k = f_{n_k}$, donde $\{n_k\}$ es una sucesión de índices.

<u>1er caso:</u> la sucesión $\{n_k\}$ de números naturales toma cualquier valor solo una cantidad finita de veces. Entonces $n_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$; esto implica que $h_k = f_{n_k}$ tienden uniformemente a g.

<u>2ndo caso:</u> hay un número m tal que $n_k = m$ para una sucesión de valores $k = k_1, k_2, \dots$, donde $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$. Entonces todas las funciones h_{k_s} coinciden con la función continua f_m, y por tanto, tienden uniformemente a esta función.

Esto demuestra que $\mathcal{F}$ es una familia pre-compacta.

d) Supongamos que $\mathcal{F}$ es pre-compacta. Esto implica que la sucesión $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge a g uniformemente; luego g es continua en K.

Denotamos por $d(\cdot, \cdot)$ la función de distancia, definida en el espacio métrico K. Tenemos que demostrar que $\max_K |f_n - g| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Tenemos $\max_K |f_n - g| = |f_n(x_n) - g(x_n)|$ para algunos puntos $x_n \in K$. Si la afirmación es falsa, entonces

$$|f_n(x_n) - g(x_n)| \geq \delta \tag{1}$$

para algún $\delta > 0$ y una sucesión de índices $n = n_1, n_2, \dots$, que tiende al infinito. Utilizando la compacidad de K y pasando a una subsucesión, podemos suponer adicionalmente que los puntos x_{n_k} tienden a un punto $q \in K$.

Por el criterio Ascoli-Arcelà, la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua. La función g es uniformemente continua, por ser continua en el compacto métrico K. Luego existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $d(y, z) < \varepsilon$, entonces

$|f(y) - f(z)| < \delta/4$ para toda función $f \in \mathcal{F} \cup \{g\}$. Existe k_0 tal que $d(x_{n_k}, q) < \varepsilon$ y $|f_{n_k}(q) - g(q)| < \delta/4$ para todo $k \geq k_0$. Luego obtenemos

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - g(x_{n_k})| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(q)| + |f_{n_k}(q) - g(q)| + |g(q) - g(x_{n_k})| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} < \delta$$

para $k \geq k_0$, lo que contradice (1).

Hemos demostrado que $\lim_{n\to\infty} \max_K |f_n - g| = 0$, es decir, que $f_n \to g$ uniformemente sobre K.