Ecuaciones diferenciales y aplicaciones **Examen final ordinario, 26/05/2022**

Grado de Matemáticas y Doble Grado Departamento de Matemáticas, UAM

La nota N se va a calcular a partir de los puntos P obtenidos según la fórmula

$$N = \text{mín}\left(K \cdot \left(\frac{P}{10}\right)^{\eta}, 10\right)$$

donde el coeficiente $K \geq 10$ y el exponente $\eta \in (0, 1]$ se determinarán después de ver vuestros exámenes.

---

1. (2 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (es decir, abierto y conexo). Sean u, v funciones armónicas en Ω. Supongamos que la función $\text{mín}(u, v)$ es subarmónica en Ω. Demostrar que $u \leq v$ en Ω o $v \leq u$ en Ω.

---

2. (2,5 puntos) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una solución de la ecuación no lineal

$$\begin{cases} \Delta u = \varphi \circ u & \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f, \end{cases}$$

donde φ es continua en $\mathbb{R}$ y f es continua en $\partial\Omega$. Supongamos que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $\varphi(x) < 0$ si $x < a$ y $\varphi(x) > 0$ si $x > b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Demostrar que $A \leq u(x) \leq B$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, donde

$$A = \text{mín}\left(\min_{\partial\Omega} f,\, a\right), \quad B = \text{máx}\left(\max_{\partial\Omega} f,\, b\right).$$

---

3. (2,5 puntos)

a) Supongamos que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que para todo k entero no negativo, existen constantes $C_k, M_k > 0$ tales que $|g^{(k)}(x)| \leq C_k(1 + |x|^{M_k})$, $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $gf \in S$ para toda función $f \in S$, donde S es la clase de Schwartz de funciones en $\mathbb{R}$.

b) Utilizando la transformada de Fourier, demostrar que para cualquier función $\varphi \in S(R)$, la ecuación diferencial con retardo

$$u(t - 1) + u''(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

tiene una única solución $u \in S$.

---

4. (3 puntos) Sea K un compacto métrico, y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $C_{\mathbb{R}}(K)$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ para todo $x \in K$, donde g es una función en K.

a) Dar ejemplos cuando la convergencia es uniforme, y cuando no lo es.

b) Dar ejemplos cuando $g \in C_{\mathbb{R}}(K)$ y, sin embargo, la convergencia no es uniforme.

c) Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Suponiendo que $f_n \to g$ uniformemente, demostrar que esta familia de funciones es pre-compacta.

d) Demostrar que si la familia $\mathcal{F}$ es pre-compacta, entonces $f_n \to g$ uniformemente.