Ecuaciones diferenciales y aplicaciones **Examen extraordinario 30/06/2022**

Grado de Matemáticas y Doble Grado

Departamento de Matemáticas, UAM

La nota N se va a calcular a partir de los puntos P obtenidos según la fórmula

$$N = \text{mín}\left(K \cdot \left(\frac{P}{10}\right)^{\eta}, 10\right)$$

donde el coeficiente $K \geq 10$ y el exponente $\eta \in (0, 1]$ se determinarán después de ver vuestros exámenes.

---

1. (2 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio, sean u, v funciones superarmónicas positivas en Ω, y sea $0 < \alpha < 1$. Demostrar que la función $u^\alpha v^{1-\alpha}$ es superarmónica en Ω.

Indicación: Considerar primero el caso cuando $\alpha = 1/2$.

---

2. (2,5 puntos) Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^n$, que satisface la desigualdad $|u(x)| \leq C_1 + C_2\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde C_1 y C_2 son constantes. Demostrar que $u = \text{const}$.

---

3. (3 puntos) Sea $[c, d] \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y sea $\varphi : [c, d] \to [c, d]$ un difeomorfismo del intervalo $[c, d]$ de clase C^1 tal que $\varphi(c) = c$, $\varphi(d) = d$ y $\text{mín}_{[c,d]} \varphi' = \beta > 0$.

a) Demostrar que el operador lineal $T : L^2([c, d]) \to L^2([c, d])$, que manda cualquier función f en la función $f \circ \varphi$, es acotado, y que $\|T\| \leq \beta^{-1/2}$. Aquí $L^2([c, d]) = L^2([c, d], dx)$.

b) Sean $p \in C^1([c, d])$ y $f \in L^2([c, d])$, donde $p(x) \geq p_0 > 0$, $p_0 = \text{const}$. Utilizando la forma cuadrática

$$a(u, v) = \int_c^d pu'v' + (u \circ \varphi)v \, dx,$$

definir una solución débil del sistema

$$\begin{cases} -(pu')' + u \circ \varphi = f & \text{en } [c, d], \\ u(c) = u(d) = 0. \end{cases}$$

Demostrar que a es continua en $W_0^{1,2}[a, b]$.

c) Dada una φ, demostrar que si la constante p_0 es suficientemente grande, entonces la solución en el sentido débil existe y es única para toda función f.

---

4. (2,5 puntos) Supongamos que K un compacto métrico y $\mathcal{F}$ es una familia de funciones pre-compacta en $C_{\mathbb{R}}(K)$. Sea g una función continua de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Demostrar que la familia

$$\mathcal{H} = \{g \circ f : \ f \in \mathcal{F}\}$$

es también pre-compacta.