Ecuaciones diferenciales y aplicaciones **Examen parcial, 03/05/2022**

SOLUCIONES

Grado de Matemáticas y Doble Grado. Departamento de Matemáticas, UAM

La nota N se va a calcular a partir de los puntos P obtenidos según la fórmula
$N = \text{mín}\left(K \cdot \left(\frac{P}{10}\right)^{\eta}, 10\right)$ donde el coeficiente $K \geq 10$ y el exponente $\eta \in (0,1]$ se determinarán después de ver vuestros exámenes.

---

1. (3 puntos) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ y sea φ una función continua en $\partial\Omega$. Se buscan soluciones $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ del problema no lineal de contorno

$$\begin{cases} \Delta u - u^{2m-1} = 0, \\ u|\partial\Omega = \varphi, \end{cases}$$

donde $m \geq 1$ es un número entero.

a) (1 punto) Demostrar que $\min_{\partial\Omega} \varphi^- \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi^+$ para todo $x \in \Omega$; aquí $\varphi^- = \text{mín}(\varphi, 0)$, $\varphi^+ = \text{máx}(\varphi, 0)$.

b) (1 punto) Supongamos que $\varphi > 0$ en $\partial\Omega$. Demostrar que el problema no puede tener más de una solución.

Indicación: Dadas unas soluciones u_1, u_2, escribir una EDP para $u_1 - u_2$.

c) (1 punto) ¿Es cierto que la unicidad de la solución se tiene para cualquier función φ, continua en $\partial\Omega$?

SOL: a): La ecuación se escribe como $\Delta u + c(x)u = 0$, donde $c(x) = -u^{2m-2}(x) \leq 0$. Por un teorema visto en clase, $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} \varphi^+$. La función $-u$ satisface la misma ecuación con el dato $-\varphi$, luego $\max_{\bar{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-\varphi)^+$. Cambiando los signos y tomando en cuenta que $(-\varphi)^+ = -\varphi^-$, obtenemos $\min_{\partial\Omega} \varphi^- \leq \min_{\bar{\Omega}} u$.

c): Sí, la unicidad se cumple para cualquier función φ; esto implica b). Efectivamente, sean u_1 y u_2 dos soluciones, y sea $v = u_1 - u_2$. Restando las ecuaciones para u_1 y u_2, obtenemos

$$\begin{cases} \Delta v + \gamma(x)v = 0, \\ v|\partial\Omega = 0, \end{cases}$$

donde $\gamma = -\sum_{k=0}^{2m-2} u_1^{2m-2-k} u_2^k$ es una función continua en $\bar{\Omega}$. Si para algún x, $u_1(x) = u_2(x)$, entonces en este punto $\gamma(x) = -(2m-1)u_1(x)^{2m-2} \leq 0$. Si $u_1(x) \neq u_2(x)$, entonces

$$\gamma(x) = -\frac{u_1(x)^{2m-1} - u_2(x)^{2m-1}}{u_1(x) - u_2(x)} < 0$$

(considerar los casos $u_1(x) < u_2(x)$ y $u_1(x) > u_2(x)$). Luego $\gamma \leq 0$ en $\bar{\Omega}$. Por un teorema visto en clase, $v = 0$ en $\bar{\Omega}$, es decir, $u_1 = u_2$.

---

2. (3 puntos) Se considera la ecuación en $\mathbb{R}^n$

$$\Delta^2 u + a\Delta u + u = \varphi,$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) **(2 puntos)** Demostrar que para todo $a < 2$ y para toda φ en la clase de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, esta ecuación tiene una única solución $u \in S(\mathbb{R}^n)$.

(b) **(1 punto)** Supongamos que $a \geq 2$. Demostrar que para toda $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, la solución es única en la clase $S(\mathbb{R}^n)$, pero existe un dato φ, para el que no existe solución de esta clase.

SOL: Aplicando la transformada de Fourier, obtenemos $(|\xi|^4 - a|\xi|^2 + 1)\hat{u}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Luego

$$\hat{u}(\xi) = f(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

donde $f(\xi) = \frac{1}{|\xi|^4 - a|\xi|^2 + 1}$. Ponemos $t = |\xi|^2 \geq 0$. Observamos que el polinomio $t^2 - at + 1$ no se anula en el semieje positivo $[0, +\infty)$ si $a < 2$ y tiene raíces en $[0, +\infty)$ si $a \geq 2$.

(a) Sea $a < 2$. La transformada de Fourier es inyectiva en la clase $S(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, basta ver que existe una única función $u(x)$ de esta clase tal que se cumple (1).

Está claro que para cualquier multiíndice $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, la derivada parcial $D^\beta f$ se expresa como

$$D^\beta f(\xi) = \frac{P_\beta(\xi)}{(|\xi|^4 - a|\xi|^2 + 1)^{m+1}},$$

donde $P_\beta(\xi)$ es un polinomio en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y $m = |\beta|$. Luego para todo m, existen unas constantes C, M tal que se tiene la estimación

$$\left|D^\beta f(\xi)\right| \leq C(1 + |\xi|)^M, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \, 0 \leq |\beta| \leq m.$$

Fijamos un m entero no negativo. Sean α un multiíndice con $|\alpha| = m$ y sea $K > 0$. Como $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$. Luego existe una constante C'_m tal que $|D^\gamma \hat{\varphi}(\xi) \leq C'_m(1+|\xi|)^{-K-M}$ para todo γ, $|\gamma| \leq m$. Por la fórmula de Leibniz, existen coeficientes $c_{\beta\alpha}$ enteros no negativos tales que

$$D^\alpha \hat{u} = D^\alpha (f \cdot \hat{\varphi}) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} c_{\beta\alpha} D^\beta f \cdot D^{\alpha - \beta} \hat{\varphi}.$$

Luego

$$|D^\alpha \hat{u}(\xi)| \leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} c_{\beta\alpha} C(1 + |\xi|)^M C'_m (1 + |\xi|)^{-K-M} =: C''_K (1 + |\xi|)^{-K}.$$

Como $K > 0$ es arbitrario, se sigue que $f \cdot \hat{\varphi}$ es de clase $S(\mathbb{R}^n)$. Como la transformada de Fourier es un isomorfismo de la clase de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ sobre sí mismo, la ecuación (1) define $u \in S(\mathbb{R}^n)$ de forma única.

(b) Supongamos que $a \geq 2$. Entonces $|\xi|^4 - a|\xi|^2 + 1 = 0$ si y solo si ξ pertenece a X, donde $X = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4})\right\}$. Tenemos que ver que $u = 0$ si $\varphi = 0$. Si $\varphi = 0$, entonces $\hat{\varphi} = 0$. Como

$$(|\xi|^4 - a|\xi|^2 + 1)\hat{u}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \tag{2}$$

vemos que $\hat{u}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Ya que la función $\hat{u}$ es continua (de hecho, es de clase S), se sigue que $\hat{u}(\xi) = 0$ para todo ξ en $\mathbb{R}^n$, lo que demuestra la unicidad.

Por otro lado, fijemos cualquier punto ξ_0 en el conjunto X (que no es vacío). Escojamos cualquier función $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{\varphi}(\xi_0) \neq 0$ (por ejemplo, el núcleo de Gauss), y sea φ su anti-transformada de Fourier. Entonces la ecuación (2) no puede ser cierta para $\xi = \xi_0$, lo que demuestra que la ecuación para u no tiene ninguna solución para este dato φ.

---

3. (2 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ un dominio suave y $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Demostrar que cualquier esfera de radio suficientemente pequeño centrada en un punto donde u se anule contiene al menos un cero de u.

SOL: Sea $\bar{x} \in \Omega$ tal que $u(\bar{x}) = 0$. Sea $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}) \subset \Omega$. Puesto que u es armónica, por la Propiedad de la Media se tiene que $0 = u(\bar{x}) = \fint_{\partial B_r(\bar{x})} u$. Puesto que u es continua y $\partial B_r(\bar{x})$ es un conjunto conexo, si u no se anula en ese conjunto, entonces o es positiva en todo el conjunto, o es negativa en todo el conjunto. En cualquiera de los dos casos se llega a una contradicción.

---

4. (2 puntos) Sea K un compacto métrico, y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos familias pre-compactas en $C_{\mathbb{R}}(K)$. Demostrar que la familia

$$\mathcal{H} = \{f \cdot g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$$

es también pre-compacta en $C_{\mathbb{R}}(K)$.

SOLUCIÓN 1: Hay que demostrar que toda sucesión de funciones en $\mathcal{H}$ tiene una subsucesión, que converge en norma de $C(\mathbb{R})$. Escojamos una sucesión arbitraria de elementos de $\mathcal{H}$; va a ser de forma $\{f_n g_n\}$, donde $f_n \in \mathcal{F}$, $g_n \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ es pre-compacta, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$, que converge en norma de $C(K)$ a una función continua $f : K \to \mathbb{R}$. Recordamos que la convergencia en norma de $C(K)$ es lo mismo que convergencia uniforme. Como $\mathcal{G}$ es pre-compacta, la sucesión $\{g_{n_k}\}$ tiene una subsucesión, que converge uniformemente a una función continua g. Cambiando la notación, denotaremos esta subsucesión otra vez como $\{g_{n_k}\}$. De esta forma, tendremos $\|f_{n_k} - f\| \to 0$ y $\|g_{n_k} - g\| \to 0$ cuando $k \to \infty$; nos referimos a las normas en $C(K)$. Luego existe una constante C tal que las normas $\|f_{n_k}\|$, $\|g_{n_k}\|$, $\|f\|$, $\|g\|$ están uniformemente acotadas por esta constante. Se tiene $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$, $u, v \in C(K)$. Utilizando la desigualdad triangular, es fácil ver que

$$\|f_{n_k} g_{n_k} - fg\| \leq \|f_{n_k}\|\|g_{n_k} - g\| + \|f_{n_k} - f\|\|g\| \leq C(\|f_{n_k} - f\| + \|g_{n_k} - g\|) \to 0$$

cuando $k \to \infty$, lo que demuestra que $\mathcal{H}$ es una familia precompacta.

SOLUCIÓN 2: Utilicemos el Teorema de Ascoli-Arcelà. Sea d la métrica en K. Como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son familias pre-compactas, son acotadas y equicontinuas. Es decir, existe una constante C tal que las normas de toda función en $\mathcal{F}$ o en $\mathcal{G}$ están acotadas por esta constante. Luego $\|fg\| \leq C^2$ para toda función $fg \in \mathcal{H}$. Además, dado cualquier $\varepsilon > 0$, podremos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta,\ h \in \mathcal{F} \text{ o } h \in \mathcal{G} \implies |h(x) - h(y)| < \varepsilon/2C^2.$$

Además, si $d(x, y) < \delta$, $f \in \mathcal{F}$ y $g \in \mathcal{G}$, entonces

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= \Big|\big[f(x)g(x) - f(x)g(y)\big] + \big[f(x)(g(x) - g(y))\big]\Big| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \leq C^2(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|) \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

lo que significa que la familia $\mathcal{H}$ equicontinua. Como es acotada, es pre-compacta por el Teorema de Ascoli-Arcelà.