Ecuaciones diferenciales y aplicaciones **Examen parcial, 03/05/2022**

Tiempo disponible: 2 horas

Grado de Matemáticas y Doble Grado. Departamento de Matemáticas, UAM

La nota N se va a calcular a partir de los puntos P obtenidos según la fórmula $N = \text{mín}\left(K \cdot \left(\frac{P}{10}\right)^{\eta}, 10\right)$, donde el coeficiente $K \geq 10$ y el exponente $\eta \in (0,1]$ se determinarán después de ver vuestros exámenes.

---

1. (3 puntos) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ y sea φ una función continua en $\partial\Omega$. Se buscan soluciones $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega})$ del problema no lineal de contorno

$$\begin{cases} \Delta u - u^{2m-1} = 0, \\ u|\partial\Omega = \varphi, \end{cases}$$

donde $m \geq 1$ es un número entero.

a) (1 punto) Demostrar que $\min\limits_{\partial\Omega} \varphi^- \leq u(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega} \varphi^+$ para todo $x \in \Omega$; aquí $\varphi^- = \text{mín}(\varphi, 0)$, $\varphi^+ = \text{máx}(\varphi, 0)$.

b) (1 punto) Supongamos que $\varphi > 0$ en $\partial\Omega$. Demostrar que el problema no puede tener más de una solución.

Indicación: Dadas unas soluciones u_1, u_2, escribir una EDP para $u_1 - u_2$.

c) (1 punto) ¿Se tiene la unicidad de la solución si φ es cualquier función, continua en $\partial\Omega$?

---

2. (3 puntos) Se considera la ecuación en $\mathbb{R}^n$

$$\Delta^2 u + a\Delta u + u = \varphi,$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

a) (2 puntos) Demostrar que para todo $a < 2$ y para toda φ en la clase de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, esta ecuación tiene una única solución $u \in S(\mathbb{R}^n)$.

b) (1 punto) Supongamos que $a \geq 2$. Demostrar que para toda $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, la solución es única en la clase $S(\mathbb{R}^n)$, pero existe un dato φ, para el que no existe solución de esta clase.

---

3. (2 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ un dominio suave y $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Demostrar que cualquier esfera de radio suficientemente pequeño centrada en un punto donde u se anule contiene al menos un cero de u.

---

4. (2 puntos) Sea K un compacto métrico, y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos familias pre-compactas en $C_{\mathbb{R}}(K)$. Demostrar que la familia

$$\mathcal{H} = \{f \cdot g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$$

es también pre-compacta en $C_{\mathbb{R}}(K)$.