Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (Grado de Matemáticas, UAM) *Curso 2021/22*

Hoja de problemas 5: La transformada de Fourier (parte final). Teorema de Lax-Milgram.

---

1. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Demostrar que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$.

---

2. (Lema de Riemann-Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demostrar que:

   (a) $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \dfrac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\sqrt{2\pi}}$;

   (b) $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$;

   (c) $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

---

3. 1) Dados espacios de Banach X, Y, Z y operadores lineales continuos $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$, demostrar que $\|BA\| \le \|B\|\|A\|$.

   2) Si $A, B \in L(X, Y)$ y $k \in \mathbb{K}$ es un escalar, demostrar que $\|kA\| = |k|\,\|A\|$ y que $\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$.

---

4. Sean a, b formas bilineales continuas en un espacio de Hilbert H. Si a es coercitiva, demostrar que existe un $\lambda > 0$ tal que $b + \lambda a$ es coercitiva.

---

5. **a)** Sea G una función de clase S en $\mathbb{R}^N$. Demostrar que la ecuación $F * G = 0$ en $\mathbb{R}^N$, donde $F \in S$ es una función incógnita, solo tiene solución trivial $F = 0$, si y solo si la transformada de Fourier $\hat{G}(\xi)$ no se anula en ningún conjunto abierto.

   b) Escribir la fórmula de solución del problema de Cauchy para la ecuación de calor

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

   donde $f \in S(\mathbb{R}^N)$. Demostrar que hay una unicidad de “solución para atrás”: si $f_1, f_2 \in S(\mathbb{R}^N)$ son datos iniciales distintos, entonces para todo t_0 positivo, las distribuciones de temperaturas $u_1(\cdot, t_0)$ y $u_2(\cdot, t_0)$, que corresponden a estos datos, son distintas también.

---

6. **a)** Sea $f(x)$ es una función de la clase de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ y $P(x)$ un polinomio de n variables. Demostrar que $Pf \in S(\mathbb{R}^n)$. Demostrar que $\frac{P}{Q}f$ pertenece también a $S(\mathbb{R}^n)$, si $Q(x)$ es otro polinomio de n variables, que satisface $|1/Q(x)| \le C(1 + |x|^M)$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde C, M son constantes.

   b) Sea $h \in S(\mathbb{R}^2)$. Demostrar que la ecuación

$$u - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^4}{\partial y^4} u = f$$

   tiene una única solución $u \in S(\mathbb{R}^2)$.

---

7. Sean H un espacio de Hilbert real, $a(v, w)$ una forma bilineal continua en H.

   a) Suponiendo que un operador lineal continuo $T : H \to H$ satisface $\|Tx\| \ge \delta\|x\|, x \in H$ para alguna constante positiva δ y $a(u, v)$ es coercitiva, demostrar que la forma $a(Tv, Tw)$ es coercitiva.

   b) Supongamos ahora que la forma $a(Tv, Sw)$ es coercitiva y que los operadores lineales $T, S : H \to H$ son continuos. Demostrar que T, S satisfacen $\|Tx\| \ge \delta_1\|x\|$, $\|Sx\| \ge \delta_2\|x\|$ $(x \in H)$, donde $\delta_1, \delta_2 > 0$. Expresar las constantes δ_1, δ_2.