Hoja de problemas 2: La ecuación de Laplace

1. Escribir la función de Green para el disco $|x| < R$ en $\mathbb{R}^2$.

2. Sea u una función, que es continua en $\bar{B}_R(x_0)$ y armónica en $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^N$. Demostrar que existe una constante C, que solo depende de la dimensión N, tal que

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{C}{R} \max_{\bar{B}_R(x_0)} |u|.$$

Indicación: Comprobarlo primero para el caso $R = 1$. Luego aplicar la desigualdad obtenida a la función $v(y) = u(x_0 + Ry)$, $|y| \leq 1$.

3. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Demostrar que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es analítica real en I si y solo si para todo compacto $K \subset I$ existen constantes C, A tales que se tiene la estimación $|f^{(m)}(x)| \leq CA^m m!$ para cualquier $m \geq 0$ y cualquier $x \in K$.

4. Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$. Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tiene la siguiente propiedad: para todo compacto $K \subset \Omega$ existen constantes C, A tales que $|\partial^\alpha f(x)| \leq CA^{|\alpha|}\alpha!$ para cualquier multiíndice $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$ y cualquier $x \in K$. (aquí $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_N!$). Demostrar que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es analítica real

5. Sea f una función continua en la circunferencia $|z| = 1$, cuya serie de Fourier es

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| = 1,$$

donde $c_n \in \mathbb{C}$ son los coeficientes de Fourier. Demostrar que f tiene una continuación analítica a un anillo $r_1 < |z| < r_2$, donde $r_1 < 1 < r_2$, si y solo si se tiene la estimación $|c_n| \leq C\rho^{|n|}$, donde $0 < \rho < 1$.

Indicación: Relacionar las series de Fourier con las series de Laurent.

6. Sea f una función continua en la circunferencia $|z| = 1$ cuya serie de Fourier tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^{-2^{|n|}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{2^n} \tag{1}$$

(se dice que es una serie lacunaria). Sea q es un número racional de forma $q = m/2^n$, donde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, y sea $w = exp(2\pi iq)$ (de forma que $w^{2^n} = 1$).

(a) Demostrar que

$$f(z) - f(wz) = g(z), \quad |z| = 1,$$

donde g es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Si f se extiende a una función analítica en un entorno de un punto z_0 de la circunferencia unidad, entonces f se extiende a una función analítica en un anillo $r_1 < |z| < r_2$, donde $r_1 < 1 < r_2$.

(c) Consideremos la función (1), donde $c_n = c_{-n} = 2^{-n \log n}$, $n \geq 1$. Demostrar que la función $h(x) = f(e^{ix})$ es 2π-periódica en $\mathbb{R}$, es de clase C^∞, pero no es analítica real en ningún intervalo de $\mathbb{R}$.

7. Sean f, ϕ funciones analíticas reales de una variable tales que $\phi \circ f$ está definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $\phi \circ f$ es analítica real.

8. Dadas funciones analíticas reales f, g en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, demostrar que $f + g$ y fg son analíticas reales. Demostrar que g/f es analítica real en $\{x \in I : g(x) \neq 0\}$.

9. Para el caso de funciones f, g analíticas reales, definidas en un dominio en $\mathbb{R}^N$, demostrar que $f + g$ y fg son analíticas reales.

10. Sea x_0 un punto de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y u una función armónica en $\Omega \setminus \{x_0\}$. Supongamos que $N > 2$ y
$$\lim_{x \to x_0} |x - x_0|^{N-2} u(x) = 0.$$
Demostrar que x_0 es una singularidad removible de u en el sentido de que u se extiende a una función armónica en Ω. Formular el análogo de esta afirmación para $N = 2$.

Sugerencia: Podemos suponer que Ω es una bola centrada en x_0. Considerar funciones $u \pm \epsilon |x - x_0|^{2-N}$, donde $\epsilon > 0$ es pequeño, y aplicarles el principio del máximo en unos dominios adecuados.

11. Sea u una función armónica no negativa en $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^N$. Utilizando la fórmula de Poisson, demostrar la desigualdad de Harnack
$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2} \frac{R-r}{R+r}\, u(x_0) \le u(x) \le \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2} \frac{R+r}{R-r}\, u(x_0),$$
si $x \in B_r(x_0)$, $r < R$.

12. Sea $\Omega \subset R^N$ un dominio acotado y sea K un subconjunto compacto de Ω. Demostrar que existe una constante C que solo depende de Ω y K tal que para toda función u armónica no negativa en Ω se tiene
$$\max_K u \le C \min_K u.$$

13. Sea $G(x, \xi)$ la función de Green en la bola $B_R(0)$ en $\mathbb{R}^N$. Utilizando la fórmula explícita, demostrar que $G(x, \xi) < 0$ si $|x| < R$, $|\xi| < R$, $x \neq \xi$.

14. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, donde está definida la función de Green $G(x, \xi)$. Aplicando el principio fuerte del máximo a un dominio adecuado, demostrar que $G(x, \xi) < 0$ si $x, \xi \in \Omega$ y $x \neq \xi$.

15. Demostrar las siguientes versiones del Teorema de Liouville:

    (1) Toda función armónica no negativa en $\mathbb{R}^n$ es constante;

    (2) Toda función armónica acotada en $\mathbb{R}^n$ es constante.

16. Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^N$ tal que $|u(x)| \le C(1 + |x|)^M$. Demostrar que u es un polinomio de grado menor o igual que M.