Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (Grado de Matemáticas, UAM) *Curso 2021/22*

Hoja de problemas 1: La introducción. La ecuación de Laplace

Ejercicios sobre la introducción.

1. El libro de Ireneo Peral, Ejercicios del Capítulo 1, ejercicio 1, b)-d), g)-i).

2. El libro de Ireneo Peral, Ejercicios del Capítulo 1, ejercicios 2) - 7).

Ejercicios sobre el laplaciano.

3. (Invariancia del Laplaciano por transformaciones ortogonales) Sea u una función de clase $C^2(B_r(0))$ y O una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^N$. Demostrar que

$$\Delta(u \circ O)(x) = (\Delta u)(Ox).$$

Deducir que la solución del problema

$$-\Delta u = 1 \quad \text{en } B_1(0), \qquad u|_{\partial B_1(0)} = 0$$

es radial y calcularla.

---

4. (el laplaciano en coordenadas polares) Dada una función $u(x,y)$, definimos

$$U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Demostrar la fórmula

$$\Delta u = \frac{1}{r}(rU_r)_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

---

5. Sean $R_1 > R_0 > 0$ y $N \geq 2$. Considérese el dominio $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : R_0 < |x| < R_1\}$. Si la parte de la frontera de Ω que corresponde a $|x| = R_0$ está abierta y la que corresponde a $|x| = R_1$ está cerrrada, calcular la probabilidad de salir partiendo de un punto dado en Ω.

---

6. Sea $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Se quiere encontrar una función u que sea solución del siguiente problema:

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2_+, \qquad u(0,y) = 1 \text{ si } y > 0, \quad u(0,y) = 0 \text{ si } y < 0.$$

Sugerencia: Pensar que la probabilidad de abandonar el recinto solo depende del ángulo de visión del origen. Es decir, buscamos soluciones que sean constantes a lo largo de semirrectas que nazcan en el origen.
