Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (Grado de Matemáticas, UAM) *Curso 2020/21*

Hoja de problemas 4: La transformada de Fourier. Métodos de Análisis Funcional.

---

1. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Demostrar que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$.

---

2. Demostrar que

   1) $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v)$ para todo par de funciones $u, v \in \mathcal{S}$ y para todo multiíndice α;

   2) Si $u, v \in \mathcal{S}$, entonces $u * v \in \mathcal{S}$.

---

3. (Lema de Riemann-Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demostrar que:

   (a) $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \dfrac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\sqrt{2\pi}}$;

   (b) $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$;

   (c) $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

---

4. 1) Sea $a > 0$. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones en $L^1(\mathbb{R})$: $\chi_{\mathbb{R}_+} \cdot e^{-ax}$; $\chi_{\mathbb{R}_-} \cdot e^{ax}$ $(a > 0)$; $e^{-a|x|}$.

   2) Sea g una función de clase $L^1(\mathbb{R})$. Utilizando la transformada de Fourier, resolver las ecuaciones diferenciales (a) $u' + au = g$; (b) $u' - au = g$; (c) $u'' - a^2 u = g$. Demostrar que cada una de estas ecuaciones tiene una solución única en $L^1(\mathbb{R})$.

---

5. Sea $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Usar la transformada de Fourier en la variable x para obtener una fórmula para la única solución acotada del problema

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2_+, \qquad u = g \quad \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+.$$

---

6. Demostrar que para todo k entero positivo, la transformada de Fourier de la función $x^k e^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ tiene la forma $p_k(\xi) e^{-\xi^2/4}$, donde p_k es un polinomio. Deducir la fórmula recurrente para estos polinomios.

---

7. (Ecuación del calor con convección) Usar la transformada de Fourier para obtener una fórmula para la única solución acotada del problema

$$u_t = u_{xx} + u_x \quad \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \qquad u(\cdot, 0) = g \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

---

8. 1) Dados espacios de Banach X, Y, Z y operadores lineales continuos $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$, demostrar que $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

   2) Si $A, B \in L(X, Y)$ y $k \in \mathbb{K}$ es un escalar, demostrar que $\|kA\| = |k| \, \|A\|$ y que $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

---

9. Sean a, b formas bilineales continuas en un espacio de Hilbert H. Si a es coercitiva, demostrar que existe un $\lambda > 0$ tal que $b + \lambda a$ es coercitiva.