Hoja de problemas 3: La ecuación de Laplace

1. Demostrar que el límite uniforme de funciones armónicas en un dominio es una función armónica.

---

2. Sea $F = [0, 1]$. Dar ejemplos de familias $\mathcal{L} \subset C_{\mathbb{R}}(F)$ tales que

   (a) $\mathcal{L}$ es acotada, pero no equicontinua;

   (b) $\mathcal{L}$ es equicontinua, pero no es acotada;

   (c) $\mathcal{L}$ es infinita, acotada y equicontinua.

   Demostrar que, de hecho, toda familia finita $\mathcal{L} \subset C_{\mathbb{R}}(F)$ es acotada y equicontinua.

   Determinar, en cuáles de estos ejemplos, $\mathcal{L}$ es relativamente compacta en $C_{\mathbb{R}}(F)$. En cada caso cuando no lo sea, encontrar una sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{L}$, que no tiene subsucesiones convergentes en la norma de $C_{\mathbb{R}}(F)$.

3.* Demostrar el Lema de Arzelà-Ascoli (o una parte de ella) para el caso de un intervalo compacto en $\mathbb{R}$.

---

4. Sea F es un conjunto compacto y convexo en $\mathbb{R}^N$ tal que $F \neq \emptyset$ y $F = \overline{\operatorname{int} F}$. Sea $\mathcal{L}$ es una familia acotada de funciones en $C_{\mathbb{R}}(F)$, que cumple la condición

$$|\nabla f(x)| \leq K, \quad x \in F,\ f \in \mathcal{L},$$

   donde K es una constante absoluta. Demostrar que entonces la familia $\mathcal{L}$ es equicontinua.

---

5. Sea $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones armónicas definidas en un abierto conexo Ω tal que $(u_k(x))_{k=1}^{\infty}$ converge para algún punto $x \in \Omega$. Demostrar que la sucesión converge uniformemente en cada subconjunto cerrado y acotado de Ω y que el límite es una función armónica.

   Nota: Esto da un método alternativo para demostrar la existencia de soluciones del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace sin utilizar Arcelà-Ascoli.

   Indicación. Usar la desigualdad de Harnack para demostrar que la sucesión es de Cauchy en $C_{\mathbb{R}}(K)$ para cualquier subconjunto compacto K de Ω.

---

6. Sean $R_1 > R_0 > 0$ y $N \geq 2$. Considérese el dominio $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : R_0 < |x| < R_1\}$. Calcular la probabilidad de que una partícula Browniana que inicia su movimiento en un $x \in \Omega$, salga de Ω por la parte interior de su frontera.

---

7. Se considera la función

$$u(x, y, z) = x^2(x^2 + ay^2 + 1) + y^2(y^2 + bz^2 + 1) + z^2(z^2 + cx^2 + 1).$$

   Determinar, para qué valores de parámetros a, b, c es esta función subarmónica en $\mathbb{R}^3$.

---

8. Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$. Demostrar lo siguiente.

   (a) Si $u_1, u_2, \dots, u_m$ son continuas en Ω, entonces $v := \text{máx}(u_1, u_2, \dots, u_m)$ es también continua.

   (b) Si $u_1, u_2, \dots, u_m$ son subarmónicas en Ω, entonces $v := \text{máx}(u_1, u_2, \dots, u_m)$ es también subarmónica.

   (c) Si u es subarmónica en Ω, $A = u(\Omega) \subset \mathbb{R}$ es su imagen y $\varphi : A \to \mathbb{R}$ es continua, creciente y convexa, entonces la composición $f \circ v$ es subarmónica en Ω.

   Nota: Observar que A es un intervalo.

---

9. (a) Sean Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$, u una función armónica en Ω y $A := u(\Omega)$ su imagen. Sea $\varphi : A \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y convexa. Demostrar que $v := \varphi \circ u$ es subarmónica.

   (b) Demostrar que $x \mapsto \log |x|$ es subarmónica en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si $N \geq 2$.

   (c) Demostrar que $v := |Du|^2$ es subarmónica si u es armónica.

---

10. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una solución de

$$\Delta u = -1 \quad \text{en } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

   Demostrar que para todo $x_0 \in \Omega$ se tiene que $u(x_0) \geq \dfrac{1}{2N} \min\limits_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2$.

---

11. (Dependencia continua) Sea $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$ una solución suave de

$$-\Delta u = f \quad \text{en } B_1(0), \qquad u = g \quad \text{en } \partial B_1(0).$$

   Demostrar que existe una constante C, independiente de u, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C\big(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |f|\big).$$

---

12. (a) Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $u \in C^2(E)$ tal que $\Delta u = u$ en E. Demostrar que u no puede tener máximos positivos ni mínimos negativos en E.

   (b) Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ abierto, y $c \in C(\overline{E})$, $c < 0$ en E. Demostrar que el problema

$$\Delta u + cu = 0 \quad \text{en } \Omega, \qquad u = g \quad \text{en } \partial\Omega,$$

   tiene a lo sumo una solución $u \in C^2(E) \cap C(\overline{E})$.

---

13. Hemos visto en la Teoría que la solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u + cu = f & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

   es única si c es una función continua en Ω y $c(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$.

   Consideremos el caso del parallelepípedo: $\Omega = [0, \ell_1] \times \cdots \times [0, \ell_N]$, donde $\ell_1, \dots, \ell_N > 0$. Aplicando el método de separación de variables, demostrar que existe una sucesión infinita de constantes *positivas* $c_j \to +\infty$ tales que en los correspondientes problemas (1) no hay unicidad, si ponemos $c(x) \equiv c_j$, $x \in \Omega$.

---

14. **(a)** Consideramos la semibola abierta $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \; x \in B_1(0), x_N > 0\}$. Sea

$$u \in C^2(B^+) \cap C(B_1(0) \cap \{x_N \geq 0\})$$

armónica en U^+ con $u = 0$ en $B_1(0) \cap \{x_N = 0\}$. Dado $x \in B_1(0)$, definimos

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x_N \geq 0, \\ -u(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases}$$

Probar que v es armónica en $B_1(0)$. Este resultado se conoce como *Principio de reflexión de Schwartz*.

(b) Resuélvase el problema

$$\Delta u = 0 \text{ si } x^2 + y^2 < 1, \; y > 0, \quad u(x,0) = 1 \text{ si } -1 < x < 1, \quad u(x,y) = 0 \text{ si } x^2 + y^2 = 1, \; y > 0.$$

---

15. Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Demostrar que $v \in C(E)$ pertenece a $\sigma(E)$ si y solo si para todo abierto $E' \subset E$ tal que $\overline{E'} \subset E$ y toda función armónica u tal que $u = v$ en $\partial E'$ se tiene que $v \leq u$ en E'.

---

16. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ un dominio suave y $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Demostrar que cualquier esfera de radio suficientemente pequeño centrada en un punto donde u se anule contiene al menos un cero de u.

---

17. (a) (Principio de comparación) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado. Decimos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es *subsolución* del problema

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \qquad u = g \quad \text{en } \partial\Omega,$$

si $-\Delta u \leq f$ en Ω, $u \leq g$ en $\partial\Omega$, y que es *supersolución* si $-\Delta u \geq f$ en Ω, $u \geq g$ en $\partial\Omega$.

Demostrar que si u es subsolución del problema y v es supersolución, entonces $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.

(b) Demostrar que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua estrictamente decreciente, entonces el principio de comparación para subsoluciones y supersoluciones es válido para el problema no lineal

$$-\Delta u = \varphi(u) \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

---

18. Sea $N = 2$ y sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$, cuya frontera es una unión finita de curvas de clase C^1. Demostrar que todo Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace (PDL) en $\bar{\Omega}$ tiene una única solución.

Indicación: Utilizando la expresión para la solución fundamental de la ecuación de Laplace, demostrar que cada punto x_* de la frontera de Ω posee una función barrera.

19. Demostrar que lo mismo se cumple para todo dominio en R^2, acotado por una curva de Jordan.

Indicación: Utilizar el Teorema de Jordan (es sobre las propiedades topológicas de las curvas de Jordan en el plano),