Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (Grado de Matemáticas, UAM) *Curso 2020/21*

Hoja de problemas 2: La ecuación de Laplace (con algunas correcciones)

1. (el laplaciano en coordenadas polares) Dada una función $u(x, y)$, definimos

$$U(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Demostrar la fórmula

$$\Delta u = \frac{1}{r}(rU_r)_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

2. (Invariancia del Laplaciano por transformaciones ortogonales) Sea u una función de clase $C^2(B_r(0))$ y O una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^N$. Demostrar que

$$\Delta(u \circ O)(x) = (\Delta u)(Ox).$$

Deducir que la solución del problema

$$-\Delta u = 1 \quad \text{en } B_1(0), \qquad u|_{\partial B_1(0)} = 0$$

es radial y calcularla.

3. Sea $\mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Se quiere encontrar una función u que sea solución del siguiente problema:

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2_+, \qquad u(0, y) = 1 \text{ si } y > 0, \quad u(0, y) = 0 \text{ si } y < 0.$$

Sugerencia: Pensar que la probabilidad de abandonar el recinto solo depende del ángulo de visión del origen. Es decir, buscamos soluciones que sean constantes a lo largo de semirrectas que nazcan en el origen.

4. Escribir la función de Green para el disco $|x| < R$ en $\mathbb{R}^2$.

5. Sea u una función, que es continua en $\bar{B}_R(x_0)$ y armónica en $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^N$. Demostrar que existe una constante C, que solo depende de la dimensión N, tal que

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{C}{R} \max_{\bar{B}_R(x_0)} |u|.$$

Indicación: Comprobarlo primero para el caso $R = 1$. Luego aplicar la desigualdad obtenida a la función $v(y) = u(x_0 + Ry)$, $|y| \leq 1$.

6. Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$. Demostrar que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es analítica real en Ω si y solo si para todo x_0 existen constantes C, A tales que se tiene la estimación $|D^\alpha f(x_0)| \leq CA^{|\alpha|}(|\alpha|)!$ para cualquier multiíndice $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$.

7*. Construir una función f infinitamente diferenciable en el intervalo $(0, 1)$, que no es analítica real en ningún subintervalo de este intervalo.

8. Sean f, ϕ funciones analíticas reales de una variable tales que $\phi \circ f$ está definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $\phi \circ f$ es analítica real.

9. Dadas funciones analíticas f, g reales en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, demostrar que $f + g$ y fg son analíticas reales. Demostrar que g/f es analítica real en $\{x \in I : g(x) \neq 0\}$.

10. Para el caso de funciones f, g analíticas reales, definidas en un dominio en $\mathbb{R}^N$, demostrar que $f + g$ y fg son analíticas reales.

11. Sea x_0 un punto de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y u una función armónica en $\Omega \setminus \{x_0\}$. Supongamos que $N > 2$ y

$$\lim_{x \to x_0} |x - x_0|^{N-2} u(x) = 0.$$

Demostrar que x_0 es una singularidad removible de u en el sentido de que u se extiende a una función armónica en Ω. Formular el análogo de esta afirmación para $N = 2$.

Sugerencia: Podemos suponer que Ω es una bola centrada en x_0. Considerar funciones $u \pm \epsilon |x - x_0|^{2-N}$, donde $\epsilon > 0$ es pequeño, y aplicarles el principio del máximo en unos dominios adecuados.

12. Sea u una función armónica no negativa en $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^N$. Utilizando la fórmula de Poisson, demostrar la desigualdad de Harnack

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \le u(x) \le \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0),$$

si $x \in B_r(x_0)$, $r < R$.

13. Sea $\Omega \subset R^N$ un dominio acotado y sea K un subconjunto compacto de Ω. Demostrar que existe una constante C que solo depende de Ω y K tal que para toda función u armónica no negativa en Ω se tiene

$$\max_K u \le C \min_K u.$$

14. Demostrar las siguientes versiones del Teorema de Liouville:

(1) Toda función armónica no negativa en $\mathbb{R}^n$ es constante;

(2) Toda función armónica acotada en $\mathbb{R}^n$ es constante.

15. Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^N$ tal que $|u(x)| \le C(1 + |x|)^M$. Demostrar que u es un polinomio de grado menor o igual que M.

16. **[Se va a pasar a la Hoja 3.]** Sea Ω un dominio de clase C^1 en $\mathbb{R}^N$ y sean ϕ, α funciones continuas en $\partial\Omega$ tales que $\alpha \ge \alpha_0$ para alguna constante positiva α_0. Supongamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisface

$$\begin{cases} -\Delta u + u^5 = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \phi & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostrar que $\max_{\bar{\Omega}} |u| \le \frac{1}{\alpha_0} \max_{\partial\Omega} |\phi|$.