Cálculo Numérico I

Primer examen parcial
viernes, 16 de marzo de 2018
1º de Mat. (grupos 711 y 716); 2º de D.Gr. (grupo 220)

Hay que justificar todas las respuestas

Apellidos ______________________.______________________ Nombre ______________________ Grupo ______

1) (**3.5 puntos**) Sea

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}.$$

a) Comprobar que g es monótona creciente en todo el eje real.

b) Sea $f(x) = g(x) - x$. Evaluar $f(n)$ para $n = -1, 0, 1, 2$. Calcular el número k de ceros de f.

Sean $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ todos los puntos fijos de g, es decir

$$g(\alpha_j) = \alpha_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, k.$$

c) Demostrar que $g'(\alpha_j) \neq 1$ para todo $j = 1, 2, \ldots, k$.

d) Demostrar que los puntos $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ son repulsores y que los puntos $\alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{k-1}$ son atractores.

e) ¿¿Cómo se puede elegir un punto inicial para encontrar α_1 aplicando el método de Newton a la función $f(x) = g(x) - x$? ¿Y para encontrar α_k?

2) (**3.5 puntos**) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & -\frac{8}{3} \\ -3 & -4 & 2 & 5 \\ -12 & -16 & 0 & 4 \\ -4 & -\frac{7}{3} & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la factorización $PA = LU$ con pivotaje (parcial por filas) de A

b) Puesto que conocemos P, L, U, ¿que sistemas elementales habría que resolver para obtener de manera directa la solución de

$$A^t x = b$$

sin volver a calcular una descomposición LU de A^t? Escribirlos en el órden en el que se tienen que resolver.

3) (**4 puntos**) Dada una matriz cuadrada compleja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, denotamos por $\|A\|_{p\to q}$ la norma inducida de la correspondiente transformación lineal de $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_q)$ (aquí $p, q \in [1, +\infty]$).

a) Demostrar la desigualdad

$$\|AB\|_{p\to r} \le \|B\|_{p\to q}\|A\|_{q\to r},$$

donde A, B son matrices de $\mathbb{C}^{n\times n}$ y $p, q, r \in [1, +\infty]$.

b) Dar un ejemplo de matrices A, B y de números $p, q, r \in [1, +\infty]$ tales que esta desigualdad sea estricta.

c) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $\|A\|_{1\to 1}$, $\|A\|_{2\to 2}$ y $\|A\|_{\infty\to\infty}$.

d) Calcular $\|A\|_{2\to\infty}$, si $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

e) Demostrar que, en general,

$$\|A\|_{2\to\infty} = \max_{1\le j\le n} \sqrt{|a_{j1}|^2 + |a_{j2}|^2 + \cdots + |a_{jn}|^2}\,.$$