Cálculo Numérico I

CURSO 2017-2018 | Lista 7 | 1^{o} DE MAT./2^{o} DE D.G.

Integración numérica (adicional)

1. Sea
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I(f,[a,b]) = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \qquad (*)$$
una fórmula simple de cuadraturas, que tiene grado de exactitud k.

   a) Supongamos que f es un polinomio de grado $k+1$. Demostrar que el error
   $$E(f,[a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx - I(f,[a,b])$$
   solo depende del coeficiente principal de f.

   b) Sea $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$ una partición del intervalo $[a,b]$ en m intervalos (que pueden tener longitudes distintas). Consideremos la fórmula compuesta de cuadraturas
   $$\int_a^b f(x)\,dx \approx I(f,[s_0,s_1]) + I(f,[s_1,s_2]) + \cdots + I(f,[s_{m-1},s_m]), \qquad (**)$$
   que corresponde a $(*)$. Demostrar que la fórmula $(**)$ tiene el mismo grado de exactitud k, es decir, es exacta para polinomios de grado menor o igual que k, pero no es exacta para polinomios de grado $k+1$.

Factorización QR y el método de mínimos cuadrados

2. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Encontrar una descomposición $A = QR$ por Gram-Schmidt.

3. Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $T_{\text{P}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación asociada ($T_{\text{P}}(x) = Px$):

   a) Demostrar que
   $$T_P \text{ es una proyección ortogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad P^{\text{T}} = P \text{ y } P^2 = P.$$

   b) Demostrar que si P da lugar a la proyección ortogonal sobre un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ entonces $I - P$ representa la proyección ortogonal sobre $V^{\perp}$.

   c) Sea $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal. Demostrar que $U^2 = I$ si y sólo si U tiene la forma $I - 2P$, donde P es una proyección ortogonal.

4. a) Sea
   $$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Hallar una factorización $B = QR$ y explicar qué dos posibilidades hay para las dimensiones de los factores Q y R y cómo se relacionan esas dos opciones.

b) Sea ahora $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n$ y con rango n. Si quisiésemos resolver el problema

$$\texttt{encontrar el } x \texttt{ tal que } ||b - Bx||_2 \texttt{ es mínimo} \qquad (*)$$

se podría usar la descomposición QR de B para reducirlo a la resolución de un sistema lineal triangular ¿qué sistema? Justificar la respuesta.

c) Indicar el numero de operaciones (en orden de magnitud) que se realizan para resolver el problema $(*)$ del apartado anterior.
Nota: al contar separar la parte de la descomposición QR de la correspondiente a la resolución del sistema triangular.

5. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular su factorización QR.

b) Utilizarla para resolver, en el sentido de los mínimos cuadrados, los sistemas sobredeterminados

$$Ax = b_j,$$

donde

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

c) Denotando por x_1, x_2, x_3 las respectivas soluciones, calcular los residuos $r_j = b_j - Ax_j$, $j = 1, 2, 3$. ¿A qué se debe la diferencia entre los tres resultados?

d) Pensando en una matriz A y un dato b generales, ¿En qué caso (para una matriz A y un dato b generales) es nulo el residuo $r = b - Ax$? ¿Puede suceder que $\|r\|_2 > \|b\|_2$? ¿Puede suceder que $r = b$ (es decir, $Ax = 0$)? ¿En qué casos ocurre que $r = b/2$?

6. Sea $b \in \mathbb{R}^m$ y sean A, T matrices de tamaños $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, tales que $\ker A = 0$, $\ker T = 0$. Ponemos $A_1 = AT$. Sean x, x_1 las soluciones de los sistemas lineales $Ax = b$ y$A_1 x_1 = b$ en el sentido de mínimos cuadrados.

a) Demostrar la siguiente desigualdad para los residuos: $\|b - Ax\|_2 \leq \|b - A_1 x_1\|_2$.

b) Demostrar que, en el caso $n = p$, se tiene la igualdad de los residuos.

7. (**matlab**) La función real f viene dada por su tabla de valores en los puntos $0, 1, \ldots, n$, obtenidos de un experimento. Se pide encontrar su mejor aproximación, en el sentido de mínimos cuadrados, por un polinomio P_m de grado m.

a) Escribir un programa que calcula estas aproximaciones y dibuja simultáneamente las gráficas de f y de P_3, P_5 y P_{10}.

b) Aplicar este programa para el caso $n = 100$ y las funciones

- $f_1(x) = e^{x/10}$
- $f_2(x) = 1/\big((x - 50)^2 + 4\big)$.

Aproximación de autovalores

8. Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$.

   a) Aproximar, por el método de las potencias, su autovalor más grande.
   Nota: se puede hacer una buena elección del v_0 inicial.

   b) Aproximar el autovalor más pequeño de A utilizando potencias inversas.

   c) Aproximar el autovalor intermedio utilizando potencias inversas con desplazamiento.

9. Sea $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz simétrica cuyos autovalores son $-7, -3, 1, 5$.

   a) Si se usa el método de la potencia, ¿a qué autovalor podemos esperar convergencia? ¿por qué?

   b) Supongamos que no conocemos el autovalor -3 pero sí el resto (es decir, -7, 1 y 5) y sabemos que el que falta está entre -3.5 y -2. Proponer un algoritmo (decir cuál y describirlo) para calcular el autovalor -3 y decir qué velocidad de convergencia se puede esperar de dicho algoritmo y por qué.