Cálculo Numérico I

CURSO 2017-2018 Lista 6 1^o DE MAT./2^o DE D.G.

1) Se considera la fórmula de cuadratura $I(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(\alpha)$ para aproximar la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, donde $\alpha \in (0,1]$.

a) Demostrar que es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1 sii $w_0 = w_1 = 1$, independientemente del valor de α.

b) Demostrar que si se quiere que, además, sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2 entonces existe un único valor de α que lo cumple. Encontrar ese α y demostrar que, con ese α, también es exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

2) Para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ se considera la fórmula de cuadratura

$$I(f) = w\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

Encontrar w, x_1, x_2, x_3 para que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

3) Utilizando la fórmula del ejercicio anterior como fórmula simple, escribir la fórmula compuesta en el intervalo $[0,4]$, que corresponde a la división $[0,4] = [0,1] \cup [1,4]$.

4) Para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ se considera la fórmula de cuadratura

$$I[f] = a(f(\xi) + f(-\xi)) + bf(\eta).$$

a) Encontrar $a, b, \xi, \eta \in \mathbb{R}$ para que sea exacta para polinomios de grado menor o igual a 5.
b) Calcular el error al usar esta fórmula para evaluar $\int_{-1}^{1}(x^8 - x^6)\,dx$.
c) Escribir la correspondiente fórmula compuesta de cuadratura para aproximar

$$\int_0^{12} f(x)\,dx$$

usando una partición del intervalo $[0,12]$ con m nodos equiespaciados.

5) La regla del punto medio $M(f) = f(\frac{b+a}{2})(b-a)$ aproxima $\int_a^b f(x)dx$ con un error $E = f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$, para un cierto $\xi \in (a,b)$.
Encontrar la regla compuesta del punto medio y una estimación del error como aproximación de $\int_a^b f(x)dx$.

6) Para las funciones **(i)** $f(x) = x\sin(x)$, **(ii)** $f(x) = xe^{-x^2}$:

a) Utilizar las reglas simples del punto medio, del trapecio y de Simpson para aproximar el valor de $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Calcular la precisión que tendrá cada resultado según la correspondiente estimación teórica del error.

c) Calcular cada una de las integrales por medio de su primitiva y explicar cualquier discrepancia significativa que se observe.

d) Calcular el valor de cada una de las integrales con una precisión de $5 \cdot 10^{-6}$ utilizando las reglas compuestas del punto medio, del trapecio y de Simpson.

7) La regla de integración de Lobatto aproxima $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ mediante

$$L_n(f) = p_1 f(-1) + p_2 f(1) + \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$

donde los pesos $p_1, p_2, w_1, \cdots w_n$ y los nodos $x_1, \cdots x_n$ se calculan imponiendo que integre de manera exacta todos los polinomios de grado menor o igual que $2n+1$.

a) Escribir el sistema cuya solución son estos pesos y estos nodos.

b) Encontrar los valores de los pesos y los nodos para $n = 2$ y aproximar $\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{1/3} dx$ mediante $L_2(f)$.

8) Se consideran las integrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x dx$, $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$ y $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx$.

a) Usar la fórmula del error en la regla compuesta del trapecio para determinar el número de nodos que para calcular esas integrales con un error menor que 10^{-6}.

b) Hacer lo mismo para la regla de Simpson.

9) El valor de la integral $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\, e^x dx$ es $\dfrac{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}{2} = 2.50917...$.

a) Usar la regla de Simpson para encontrar un valor aproximado.

b) Usar la regla del punto medio compuesta, con dos subintervalos, para encontrar un valor aproximado.

c) Calcular las cotas de error teóricas, en ambos casos, y comparar con el error real.

10) Se considera la regla de cuadratura $Q(f) = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_1))$ para aproximar la integral $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx$.

a) Encontrar los nodos x_0 y x_1 para que sea exacta de orden 3.

b) Usarla para aproximar la integral $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\, e^x dx$ y estimar el error que se comete.
`Observación`: el intervalo de integración es **diferente**.

11) Se considera la fórmula de integración interpolatorias sobre un intervalo I con los puntos $x_0, \ldots, x_n$ simétricos respecto del centro c de este intervalo, es decir, $\dfrac{x_k + x_{n-k}}{2} = c$.

a) Demostrar que los pesos satisfacen $w_k = w_{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots n$.

b) Deducir que, si n es par, la fórmula interpolatoria es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que $n + 1$.