Cálculo Numérico I

Curso 2017-2018 | Lista 3 | 1^{o} de Mat./2^{o} de D.G.

1) Aplicamos el método de punto fijo a la función $g(x) = \dfrac{5x}{1+x^4}$.

a) Encontrar los puntos fijos de g. ¿Son atractores o repulsores?

b) Sea F el conjunto de puntos fijos de g, encontrado en el apartado anterior. Demostrar lo siguiente. Para todo dato inicial x_0, ó bien $x_k \in F$ para algún k finito (en este caso, lógicamente, los aproximantes $\{x_n\}$ convergen), ó bien $\{x_n\}$ no tienen ningún límite finito o infinito ($\pm\infty$). Comprobar también que en el último caso, la sucesión $\{|x_n|\}$ tampoco tiene límite (finito o infinito).

2) Se considera la función $f(x) = \text{signo}(x)|x|^a$, donde $\text{signo}(0) = 0$, $\text{signo}(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$ y $a > 0$ es un parámetro.

a) ¿Existen valores de a para los que no tenemos convergencia local del método de Newton a la raíz 0 de f? ¿Son válidos los teoremas que vimos en clase para estos casos?

b) Determinar los valores de a tales que se tiene la convergencia local. ¿Va a haber convergencia global en estos casos?

c) En casos cuando tenemos la convergencia local, determinar el orden de convergencia del método de Newton (en función de a).

3) Aplicamos el método del punto fijo a la función $g(x) = \frac{x}{1+2x}$ escogiendo $x_0 = 1$ como aproximante inicial.

a) Comprobar que $\alpha = 0$ es el único punto fijo de g. Demostrar que es atractor.

b) Decir exactamente, cuántas iteraciones necesitaremos para lograr que $|x_n - \alpha| < \frac{1}{10}$. ¿Y cuántas para tener $|x_n - \alpha| < \frac{1}{10^5}$?

4) (Continuación del ejercicio anterior). Supongamos ahora que g es cualquier función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$.

a) Demostrar que el punto fijo $\alpha = 0$ es atractor si $g''(0) < 0$ y es repulsor si $g''(0) > 0$.

b) Supongamos que $g''(0) < 0$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión de aproximantes que tiende al punto fijo 0. Demostrar que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = |g''(0)|/2.$$

c) Ponemos $t_n = 1/x_n$. Sabemos pues que $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = |g''(0)|/2$. Deducir que existe el límite finito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx_n}.$$

Calcular este límite.

5) Aplicamos el método de punto fijo a la función $g(x) = (x-2)/3 + C(x+1)^{-1/2}$, donde C es una constante positiva.

a) Demostrar que g es convexa en $(-1, +\infty)$. Demostrar que, indepentientemente del valor de C, g tiene exactamente un punto fijo en este intervalo.

b) Investigar si es atractor o repulsor. Calcular el orden de convergencia del método de punto fijo y demostrar que este orden no depende de C.

c) Demostrar que el método converge para todo aproximante inicial x_0 en $(-1, \infty)$.

6) (Método de Steffensen)* El método de Newton para encontrar soluciones de $f(x) = 0$ tiene el inconveniente de que necesita calcular derivadas de la función $f(x)$. Se puede sustituir la iteración de Newton por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

con g apropiada (Newton corresponde a $g = f'$). El método de Steffensen corresponde a tomar $g(x) = \frac{f(x+f(x))-f(x)}{f(x)}$ lo que da lugar a la iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \ , \ n \geq 0.$$

a) Este método es *muy cercano* al de Newton, ¿por qué?

b) Supongamos que f es derivable suficiente número de veces. Probar que si x_0 se elige suficientemente cercano a la solución, α, y $f'(\alpha) \neq 0$ entonces el método converge cuadráticamente.

c) Aplicar esa iteración para $f(x) = e^x - x - 2$ con $x_0 = 1$ y "verificar" numéricamente que el orden de convergencia es 2.

d) Analizar el comportamiento del método al variar la elección del punto inicial $x_0 \in [-10, 10]$.