Cálculo Numérico I
1º de Matemáticas y 2º de la Doble Titulación en Informática y Matemáticas

CURSO 2017/18 | 20 DE ABRIL DE 2018 | SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

APELLIDOS, NOMBRE ______________________________

DNI ______________________ GRUPO __________

Hay que justificar todas las respuestas

---

1. (4 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & t-1/2 & -t \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde t es un parámetro complejo.

a) Escribir los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel, aplicados al sistema lineal $Ax = b$ (con un dato b). Investigar la convergencia de estos dos métodos para el caso de $t = 1$.
b) ¿Para qué valores del parámetro t converge el método de Jacobi? ¿Para cuál de estos valores, la convergencia es la más rápida posible?
c) ¿Para qué valores del parámetro t converge el método de Gauss-Seidel?
d) Dar un ejemplo del valor t tal que el método de Jacobi converge y el de Gauss-Seidel diverge. Demostrar que la convergencia del método de Gauss-Seidel para el sistema $Ax = b$ implica la convergencia del método de Jacobi.

---

2. (4 puntos) a) Sea $f(x) = x^{27} - 10x^{16} + 12$, sean $\{x_j\}_{j=0}^{26}$ unos 27 números reales tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, y sea p el polinomio interpolador de f en estos puntos. Demostrar que

$$f(x) - p(x) = \prod_{j=0}^{26}(x - x_j).$$

b) Sean $\{x_k\}_{k=-N}^{N} = \{x_{-N}, x_{-N+1}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N\}$ unos $2N+1$ números reales distintos tales que $x_0 = 0$ y $x_{-k} = -x_k$ para todo $k = 1, \ldots, N$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, es decir tal que $f(-x) = -f(x)$. Demostrar que el polinomio p, interpolador de f en esos puntos, es una función impar. Deducir que p tiene grado $\leq 2N - 1$.

---

3. (4 puntos) a) Encontrar $v, w \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha < 1$ tales que la fórmula de cuadratura

$$I[f] = v(f(1) + f(-1)) + w(f(\alpha) + f(-\alpha))$$

para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ sea exacta para todo polinomio de grado menor o igual a 4.

b) Determinar el máximo entero m tal que esta fórmula es exacta para todo polinomio de grado menor o igual a m.

c) Escribir la correspondiente fórmula compuesta para aproximar la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$, usando la partición del intervalo $[0, 1]$ en 20 subintervalos iguales.