

# Cálculo Numérico I

CURSO 2016-2017

Lista 5

1º DE MAT./2º DE D.G.

1) Se considera la fórmula de cuadratura  $I(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(\alpha)$  para aproximar la integral  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ , donde  $\alpha \in (0, 1]$ .

a) Demostrar que es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1 si  $w_0 = w_1 = 1$ , independientemente del valor de  $\alpha$ .

b) Demostrar que si se quiere que, además, sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2 entonces existe un único valor de  $\alpha$  que lo cumple. Encontrar ese  $\alpha$  y demostrar que, con ese  $\alpha$ , también es exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

2) Para aproximar  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  se considera la fórmula de cuadratura

$$I(f) = w(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

Encontrar  $w, x_1, x_2, x_3$  para que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

3) La regla del punto medio  $M(f) = f(\frac{b+a}{2})(b-a)$  aproxima  $\int_a^b f(x) dx$  con un error  $E = f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}$ , para un cierto  $\xi \in (a, b)$ .

Encontrar la regla compuesta del punto medio y una estimación del error como aproximación de  $\int_a^b f(x) dx$ .

4) Para las funciones (i)  $f(x) = x \sin(x)$ , (ii)  $f(x) = xe^{-x^2}$ :

a) Utilizar las reglas simples del punto medio, del trapecio y de Simpson para aproximar el valor de  $\int_0^1 f(x) dx$ .

b) Calcular la precisión que tendrá cada resultado según la correspondiente estimación teórica del error.

c) Calcular cada una de las integrales por medio de su primitiva y explicar cualquier discrepancia significativa que se observe.

d) Calcular el valor de cada una de las integrales con una precisión de  $5 \cdot 10^{-6}$  utilizando las reglas compuestas del punto medio, del trapecio y de Simpson.

5) La regla de integración de Lobatto aproxima  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  mediante

$$L_n(f) = p_1 f(-1) + p_2 f(1) + \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

donde los pesos  $p_1, p_2, w_1, \dots, w_n$  y los nodos  $x_1, \dots, x_n$  se calculan imponiendo que integre de manera exacta todos los polinomios de grado menor o igual que  $2n + 1$ .

a) Escribir el sistema cuya solución son estos pesos y estos nodos.

b) Encontrar los valores de los pesos y los nodos para  $n = 2$  y aproximar  $\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{1/3} dx$  mediante  $L_2(f)$ .

6) Se consideran las integrales  $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ ,  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  y  $\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx$ .

a) Usar la fórmula del error en la regla compuesta del trapecio para determinar el número de nodos que para calcular esas integrales con un error menor que  $10^{-6}$ .

b) Hacer lo mismo para la regla de Simpson.

7) El valor de la integral  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) e^x dx$  es  $\frac{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}{2} = 2.50917\dots$ .

a) Usar la regla de Simpson para encontrar un valor aproximado.

b) Usar la regla del punto medio compuesta, con dos subintervalos, para encontrar un valor aproximado.

c) Calcular las cotas de error teóricas, en ambos casos, y comparar con el error real.

8) Se considera la regla de cuadratura  $Q(f) = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_1))$  para aproximar la integral  $\int_{-1/2}^{1/2} f(x) dx$ .

a) Encontrar los nodos  $x_0$  y  $x_1$  para que sea exacta de orden 3.

b) Usarla para aproximar la integral  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) e^x dx$  y estimar el error que se comete.

**Observación:** el intervalo de integración es **diferente**.

9) Se considera la fórmula de integración de Newton–Cotes sobre un intervalo  $I$  con los puntos  $x_0, \dots, x_n$  simétricos respecto del centro  $c$  de este intervalo, es decir,  $\frac{x_k + x_{n-k}}{2} = c$ .

a) Demostrar que los pesos satisfacen  $w_k = w_{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

b) Deducir que, si  $n$  es par, la fórmula de Newton–Cotes es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que  $n + 1$ .

### Fórmulas de cuadraturas de Gauss

10) Sea  $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$  y sean  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$  los polinomios de Chebyshev ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

a) Demostrar que

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \rho(x) dx = c_n \delta_{nm},$$

donde  $\delta_{nm} = 0$  si  $n \neq m$ ,  $\delta_{nm} = 1$  si  $n = m$  y  $c_n > 0$  son constantes numéricas, es decir, que  $\{T_n(x)\}$  es una sucesión de polinomios ortogonales. Calcular  $c_n$ . (Comprobar primero que estas integrales impropias convergen.)

b) ¿Para qué elección de nodos  $x_k \in (-1, 1)$  existe una fórmula de cuadraturas

$$\int_{-1}^1 f(x) \rho(x) dx \approx I(f) = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k),$$

que es exacta de orden  $2n + 1$ ?

11) Sean  $x_0, \dots, x_n$  nodos de Gauss en  $(-1, 1)$  con el peso  $\rho(x) \equiv 1$  y sean  $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$  otros  $n$  puntos cualesquiera de este intervalo. Sea

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx I(f) = \sum_{k=0}^{2n} w_k f(x_k)$$

la fórmula de integración interpolatoria en  $[-1, 1]$  que corresponde a los nodos  $x_0, \dots, x_{2n}$ . Calcular los pesos  $w_{n+1}, \dots, w_{2n}$ .