Cálculo Numérico I

CURSO 2016-2017 Lista 2 1º MAT./2º D.G.

1) Analizar la convergencia del método del punto fijo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, para calcular las raíces reales de $f(x) = x^2 - x - 2$, con cada una de las siguientes g's: $g_1(x) = x^2 - 2$, $g_2(x) = \sqrt{x+2}$, $g_3(x) = -\sqrt{2+x}$ y $g_4(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ con $x \neq 0$.

2) Encontrar los puntos fijos de las siguientes iteraciones y analizar la convergencia:

a) $x_{n+1} = \sqrt{p + x_n}$ con $p > 0$.

b) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n}$.

3) En el intervalo [0,1] se considera la función $g(x) = \lambda x(1-x)$ donde $\lambda \in [0,4]$.

a) Demostrar que g envía el intervalo $[0,1]$ en sí mismo.

b) ¿Cuántos puntos fijos tiene g en [0,1]?

c) Demostrar que el punto fijo $p = 0$ es atractor si $\lambda < 1$ y repulsor para $\lambda > 1$.

4) Se considera la ecuación $\tan x = x$ para $x > 0$.

a) Demostrar que tiene una única raíz en cada uno de los intervalos $(\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi(n+1))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Escribir un programa que use iteración para calcular las 10 primeras raíces ($n = 0, 1, ..., 9$) con 6 dígitos correctos.

5) Se considera la función $g(x) = (1/2)x - x^3$.

a) ¿Cuántos puntos fijos tiene g?

b) Hallar un punto $\beta > 0$ con la propiedad $g(\beta) = -\beta$.

c) ¿Qué le ocurre a la iteración de punto fijo para $x_0 \in (0, \beta)$? ¿Y para $x_0 = \beta$? ¿Y para $x_0 > \beta$?

`Observación`: no es necesario considerar los casos en que x_0 sea negativo pues al cambiar el signo de x_0 cambia el signo de todos los iterados.

6)

a) Encontrar los puntos fijos de $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \sin(x)$.

b) Para cada x_0 real la sucesión de iterados converge a un punto fijo. Determinar, en función de x_0, cuál es ese límite.

7) Sea $f \in \mathcal{C}^{m+1}$, $m \geq 2$ (la función y sus $m+1$ primeras derivadas son continuas) tal que

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(m-1)}(\xi) = 0, \text{ pero } f^{(m)}(\xi) \neq 0.$$

a) Considerar la iteración del método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, $k \geq 0$, y demostrar que no puede tener convergencia cuadrática para aproximar ξ.

b) Considerar el método de Newton modificado $x_{k+1} = x_k - m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $\quad k \geq 0$, y demostrar que su orden de convergencia sí es 2.

8) Las funciones $g(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \tan(x)$ tienen ambas un punto fijo en $\alpha = 0$ y para ambas $g'(0) = 1$.

a) Probar que para $|x_0|$ suficientemente pequeño con el seno la iteración de punto fijo converge mientras que con la tangente diverge.

b) En el caso $|g'(\alpha)| = 1$ la convergencia o divergencia depende de los valores de las derivadas superiores de g. Probar que si con $|g'(\alpha)| = 1$ hay convergencia cada error es asintóticamente de la misma magnitud del anterior con lo que la convergencia es lentísima y el método carece de utilidad en ese caso.

9) Suponer que $f \in \mathcal{C}^2$, $f(\xi) = 0$ y que en el intervalo $[a, \xi]$ (con $a < \xi$), $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$.

a) Demostrar que para todo $x_0 \in [a, \xi]$ el método de Newton converge a ξ.

b) ¿Es eso cierto, en general, si cambiamos $[a, \xi]$ por $[\xi, a]$?