**Cálculo Numérico I**
**1º de Matemáticas y 2º de la Doble Titulación en Informática y Matemáticas**

Curso 2016/17 | 24 de mayo de 2017 | Examen final

Apellidos, Nombre ______________________________

DNI ______________________________ Grupo ____________

**Hay que justificar todas las respuestas**

**1.** Dado un parámetro real $C$, se pretende resolver la ecuación no lineal $g(x) = x$, donde $g(x) = -2x^3 - \frac{1}{3}x + C$.

**a)** Demostrar que para todo $C$, la ecuación tiene exactamente una raíz real. Escribir las iteraciones del método de punto fijo (aplicado a la función $g$). Demostrar que este método converge si $|C| < \frac{14}{27}$ y diverge si $|C| > \frac{14}{27}$. ¿Cuál va a ser el orden de convergencia de este método? Definir el orden de convergencia.

**b)** Reescribimos la ecuación como $\frac{4}{3}x + 2x^3 - C = 0$ y le aplicamos el método de Newton. Escribir la fórmula de las iteraciones de este método. ¿Cuál va a ser el orden de convergencia? ¿Cómo podemos escoger el aproximante inicial para garantizar la convergencia?

**c)** Demostrar que, de hecho, se tiene la convergencia del método de Newton para cualquier valor de $C$ y para todo aproximante inicial.

**2.** Para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ se considera la fórmula de cuadratura

$$I[f] = a(f(x) + f(-x)) + bf(y).$$

**a)** Encontrar $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ para que sea exacta para polinomios de grado menor o igual a 5.

**b)** Calcular el error al usar esta formula para evaluar $\int_{-1}^{1}(x^8 - x^6)dx$.

**c)** Escribir la correspondiente fórmula de integración compuesta para aproximar

$$\int_{-7}^{6} f(x)dx$$

usando una partición del intervalo $[-7, 6]$ con nodos equiespaciados.

**3.** Sea $A$ una matriz cuadrada de un tamaño $m \times m$, representada como $A = M - N$, donde las matrices $M, N$ son invertibles. Se plantean dos métodos iterativos para resolver el sistema $Ax = b$:

(1) $$Mx_{n+1} = Nx_n + b;$$

(2) $$Nx_{n+1} = Mx_n - b.$$

**a)** Demostrar que si en alguno de estos dos casos, los vectores aproximantes $x_n \in \mathbb{R}^m$ tienen un límite $x$, entonces $Ax = b$.

**b)** Demostrar que los métodos (1) y (2) no pueden converger a la vez. ¿Pueden los dos métodos ser divergentes?

**c)** Considerar el caso especial: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, donde $a, b \neq 0$ son parámetros reales. ¿Para qué valores de $a$ y $b$ converge el método (1)? ¿Para qué valores de $a$ y $b$ converge el método (2)?

**d)** Supongamos que para las matrices del apartado c), el método (1) converge. Demostrar que existe un $\rho \in (0, 1)$ tal que los errores $e_n = x_n - x$ satisfacen $\|e_n\|_2 = \rho^n \|e_0\|_2$ para todo $n$. ¿Es cierta esta afirmación para las $p$-normas, en vez de la 2-norma?

**4.**
**a)** Calcular la factorización $QR$ (reducida) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

**b)** Sean $A$, $V$ matrices reales arbitrarias de tamaños $m \times n$ y $n \times n$, respectivamente, tales que $\ker A = 0$, $\ker V = 0$. Ponemos $A_1 = AV$. Sean $A = QR$ y $A_1 = Q_1 R_1$ las respectivas factorizaciones reducidas. ¿Es cierto que siempre $QQ^T = Q_1 Q_1^T$?
**c)** (continuación) ¿Es cierto que siempre $Q = Q_1$?

---

**Solución Ejercicio 1**
a) Como $g'(x) = -(6x^2 + \frac{1}{3})$ es siempre $< 0$, entonces $g$ es monótona decresciente, y es fácil ver que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ y que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. La existencia del punto fijo es consecuencia del teorema de Bolzano, y la unicidad es consecuencia de la monotonia.
El método converge si el punto fijo $x_s = g(x_s)$ es tal que $|g'(x_s)| < 1$, es decir si $6x_s^2 + \frac{1}{3} < 1$, o sea si $-\frac{1}{3} < x_s < \frac{1}{3}$ . Consideramos $C > 0$ (observar que el mismo argumento se puede adaptar de manera sencilla al caso $C < 0$), lo que implica $x_s > 0$. Como $g$ es decresciente, tendremos $g(x) < x$ para todo $x > x_s$. Así que $x_s < \frac{1}{3}$ si y solo si $g(\frac{1}{3}) < \frac{1}{3}$. Trabajamos entonces con esta última condición:

$$g(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27} - \frac{1}{9} + C = -\frac{5}{27} + C < \frac{1}{3} \Leftrightarrow C < \frac{14}{27}.$$

b) La iteración de Newton para $f(x) = 2x^3 + \frac{4}{3}x - C$ es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{2x_k^3 + \frac{4}{3}x_k - C}{6x_k^2 + \frac{4}{3}}.$$

Como $f'$ nunca se anula, sabemos que el método de Newton converge siempre converge al orden dos si el punto inicial está suficientemente cerca de la solución $x_s$ de la ecuación $f(x_s) = 0$.
c) [Para mejor entender el argumento, se aconseja hacer un dibujo] La función $f$ es monótona cresciente porque $f' > 0$. Entonces

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \text{ es } \begin{cases} > x_k & \text{si} \quad x_k < x_s \\ < x_k & \text{si} \quad x_k > x_s \end{cases}.$$

Consideramos $C > 0$ (observar que el mismo argumento se puede adaptar de manera sencilla al caso $C < 0$), lo que implica $x_s > 0$. Si $x_0 > x_s$, entonces la sucesión de las iteradas decrece y tiende al punto fijo $x_s$. Efectivamente, debido a la convexidad de $f$ en todo semieje $[0, +\infty)$, se ve que la recta tangente a $f$ que pasa por $x_k$ siempre se va quedar por debajo de la gráfica de $f$ para todo $k$, luego se va a cumplir $x_s < x_{k+1} < x_k$ para todo $k = 0, 1, \dots$. Dado que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada, tiene límite, que solo puede ser igual a $x_s$.
Consideremos ahora el caso cuando $x_0 < x_s$. Si existe un índice $k$ tal que $x_k > x_s$, entonces $\{x_n\}$ tiende a $x_s$, gracias a lo que vimos en el caso anterior. Por otro lado, si $x_k < x_s$ para todo $k$, entonces $f(x_k) < 0$ para todo $k$, lo que implica que $x_k < x_{k+1} < x_s$ para todo $k = 0, 1, \dots$. Luego $\{x_n\}$ tiene límite, que es igual a $x_s$. (De hecho, es fácil ver que este último caso, cuando $x_k < x_s$ para todo $k$, no se presenta nunca.)

---

**Solución Ejercicio 2**
a)

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} 1dt & = 2 & = 2a + b \\ \int_{-1}^{1} tdt & = 0 & = by \\ \int_{-1}^{1} t^2dt & = \frac{2}{3} & = 2ax^2 + by^2 \\ \int_{-1}^{1} t^3dt & = 0 & = by^3 \\ \int_{-1}^{1} t^4dt & = \frac{2}{5} & = 2ax^4 + by^4 \\ \int_{-1}^{1} t^5dt & = 0 & = by^5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ b & = 2(1-a) \end{cases}$$

(la hipótesis $b = 0$ lleva a contradicción). Luego $ax^2 = \frac{1}{3}$, $ax^4 = \frac{1}{5}$, lo que nos da los valores

$$x^2 = \frac{3}{5}, a = \frac{5}{9}, b = \frac{8}{9}.$$

b)

$$\int_{-1}^{1}(x^8 - x^6)dx = \frac{2}{9} - \frac{2}{7} = -0.063492063\ , \quad I[x^8 - x^6] = \frac{5}{9} * 2 * ((\frac{3}{5})^4 - (\frac{3}{5})^3) = -0.096$$

Error $= 0.032507937$.

c) Sean $x_k = -7 + \frac{13(k-1)}{N-1}$, por $k = 1, \dots, N$. Definimos $s_k(t) = \frac{x_{k+1}+x_k}{2} + \frac{x_{k+1}-x_k}{2}t$, por $k = 1, \dots, N-1$.

$$\int_{-7}^{6} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\Big((x_{k+1} - x_k)\, I[f \circ s_k]\Big)$$

donde $f \circ h(t) = f(h(t))$.

---

**Solución Ejercicio 3**

a) Consideramos (1):

$$Ax_{k+1} = Mx_{k+1} - Nx_{k+1} = N(x_k - x_{k+1}) + b.$$

Si $x_k$ tiene limite, entonces la sucesión $t_k = x_k - x_{k+1}$ tiende a 0, y $Ax_k$ tiende a $b$. (Observación: como la función $x \mapsto Ax$ es continua, entonces $\lim_{k\to\infty} Ax_k = A \lim_{k\to\infty} x_k$).

b) Sea $x_s$ tal que $Ax_s = b$, decimos $B_1 = M^{-1}N$ y $B_2 = N^{-1}M = B_1^{-1}$. Sabemos entonces que $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de $B_1$ si y solo si $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de $B_2$, porque $B_1$ es invertible:

$$B_1 v = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda B_1^{-1} v.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\rho(B_1) = \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \text{ autovalor de } B_1\} &= \max \frac{1}{\{|\frac{1}{\lambda}| \,:\, \lambda \text{ autovalor de } B_1\}} \\ &= \frac{1}{\min\{|\frac{1}{\lambda}| \,:\, \lambda \text{ autovalor de } B_1\}} = \frac{1}{\min\{|\mu| \,:\, \mu \text{ autovalor de } B_2\}} \\ &\geq \frac{1}{\max\{|\mu| \,:\, \mu \text{ autovalor de } B_2\}} = \frac{1}{\rho(B_2)}\end{aligned}$$

así que $\rho(B_1) < 1 \Rightarrow \rho(B_2) > 1$. Por otro lado, si $B_1$ tiene algunos autovalores de módulo menor que 1 y otros autovalores de módulo mayor que 1, entonces $\rho(B_1) > 1$, $\rho(B_2) > 1$, y los dos métodos son divergentes a la vez.

c) Consideramos (1): $B_1 = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -1/b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a/b \\ -a/b & 0 \end{pmatrix}$.

Luego $\rho(B_1) = |a/b|$, así que (1) es convergente si $|a| < |b|$.

d) Para las matrices del apartado anterior tenemos $B_1 = \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma J$ donde $\gamma = a/b$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $J^2 = -I$, entonces $J^3 = -J, J^4 = I, J^5 = J$. Además, $\|Jv\|_p = \|v\|_p$ para todo $p > 0$ y todo $v \in \mathbb{R}^2$, así que $\|B_1^n v\|_p = |\gamma|^n \|v\|_p$ para todo $p > 0$ y todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Ahora sea $x_s$ tal que $Ax_s = b$ y $\epsilon_n = x_n - x_s$. Como $\epsilon_n = B_1\epsilon_{n-1} = B_1^n\epsilon_0$, la afirmación queda demostrada con $\rho = |\gamma| < 1$.

---

**Solución Ejercicio 4**

a)

$$Q = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 \\ -3/7 & -6/7 \\ 6/7 & -2/7 \end{pmatrix}\ , \quad R = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

b) Sí, porque $QQ^T$ es la proyección ortogonal sobre la imagen de $A$ y, como $V$ es invertible, $A$ y $A_1$ tienen la misma imagen.

c) No, porqué las columnas de $Q$ se obtienen de la ortonormalización de Gram-Schmidt de las columnas de $A$, que en general van a ser distintas de las de $A_1$.
Para encontrar un contraejemplo, basta escoger $A = Q$, $A_1 = AV$, donde $Q^T Q = I_n$ y la matriz $V \neq I_n$ es ortogonal. Entonces $A = QI_n$ es la factorización $QR$ de $A$. Dado que $A_1^T A_1 = Q^T V^T V Q = Q^T Q = I_n$, la factorización $QR$ de $A_1$ es $A_1 = Q_1 I_n$, donde $Q_1 = A_1$. Por tanto, $Q_1 = AV = QV \neq Q$.