Cálculo Numérico I

Primer examen parcial
viernes, 17 de marzo de 2017
1º de Mat (grupos 711 y 716); 2º de D.Gr. (grupo 220)

Hay que justificar todas las respuestas

Apellidos ______________________.______________________ Nombre ______________________ Grupo ______

1) (**5 puntos**) Se considera la ecuación (*) $x = 2 - Ce^{2x}$, donde C es un parámetro positivo.

a) Demostrar que esta ecuación tiene una única solución real.

b) Demostrar que el método del punto fijo, aplicado a la función $g(x) = 2 - Ce^{2x}$, converge si $0 < C < \frac{1}{2}\,e^{-3}$, y diverge si $C > \frac{1}{2}\,e^{-3}$.

c) Sea $C > 0$ una constante cualquiera. La ecuación (*) se reescribe como $f(x) = 0$, donde $f(x) = x - 2 + Ce^{2x}$. Escribir la fórmula de las iteraciones del método de Newton para calcular la raíz de f. ¿Cómo puede uno escoger el aproximante inicial x_0 para asegurar la convergencia de este método?

d) Suponiendo que la sucesión de los aproximantes converge, ¿cuál será su orden de convergencia en el caso del método de Newton y en el caso del método de punto fijo?
Dar la definición del orden de convergencia.

2) (**5 puntos**) Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular $L = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$ y $\ell = \min\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$.

b) Calcular $q = \dfrac{\|A\|_{1\to 1}}{\|A\|_{\infty\to\infty}}$. (Aquí $\|A\|_{p\to p}$ es la norma matricial de A, asociada a la norma vectorial $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^n$.)

c) Demostrar que para cualquier matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ siempre se obtiene el mismo valor de q.