Cálculo Numérico I
1º de Matemáticas y 2º de la Doble Titulación en Informática y Matemáticas

CURSO 2016/17 | 21 DE ABRIL DE 2017 | EXAMEN PARCIAL 2
TIEMPO DISPONIBLE: 2 HORAS

APELLIDOS, NOMBRE ______________________________

DNI ______________________________ GRUPO ______________

---

1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 1 & 1 & q \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $p, q \in \mathbb{R}$.

a) Investigar la convergencia de los métodos iterativo de Jacobi y de Gauss-Seidel, aplicado al sistema lineal $Ax = b$ (con un dato b), para el caso de los parámetros $p = 1/2$, $q = -1$.
b) ¿Para qué valores de parámetros (p, q) converge el método de Jacobi?
c) ¿Para qué valores de parámetros (p, q) converge el método de Gauss-Seidel? Demostrar que para cualquier elección de p y q, el método de Gauss-Seidel converge si y solo si converge el método de Jacobi.
d) ¿En cuál de estos dos casos, es más rápida la convergencia?

---

2. Sea $\mathcal{P}_{n-1}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n-1$, y sea $X = \{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n puntos reales distintos: $x_i \neq x_j$, $i \neq j$.
a) Sean $\{L_j(x)\}_{j=1}^n \subset \mathcal{P}_{n-1}$ los polinomios característicos (ó elementales) de Lagrange asociados a X, que satisfacen $L_j(x_i) = \delta_{ij}$. Definimos el polinomio $p = \sum_{j=1}^n L_j$. Demostrar que $p(x) = 1$ por todo x.
b) Sea $\{N_k\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathcal{P}_{n-1}$ el conjunto de los polinomios definidos por

$$N_0(x) = 1; \qquad N_k(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)\,,\ 1 \leq k \leq n-1.$$

Demostrar que $\{N_k\}$ es una base de $\mathcal{P}_{n-1}$.

Si $n = 3$ y $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 8$, calcular las constantes c_k tales que $L_1 = \sum_{k=0}^2 c_k N_k$.

c) Sea $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ el polinomio interpolador de la función $f(x) = \sin(x)$ con los nodos $x_i = -\frac{\pi}{2} + \frac{i-1}{n-1}\pi$, $i = 1, \ldots, n$. Definimos

$$D_n = \sup_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |f(x) - p_{n-1}(x)|.$$

Demostrar que $\lim_{n\to\infty} D_n = 0$.
d) Sean $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ los polinomios definidos por

$$T_0(x) = 1\ , \quad T_1(x) = x\ , \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad n \geq 2.$$

Demostrar que $T_n \in \mathcal{P}_n$ para todo n, y escribir explícitamente T_6 y sus ceros.
