Cálculo Numérico I
1º de Matemáticas y 2º de la Doble Titulación en Informática y Matemáticas

Curso 2016/17 | 24 de mayo de 2017 | Examen final

Apellidos, Nombre ______________________________

DNI ______________________________ Grupo ______________

Hay que justificar todas las respuestas

1. Dado un parámetro real C, se pretende resolver la ecuación no lineal $g(x) = x$, donde $g(x) = -2x^3 - \frac{1}{3}x + C$.
a) Demostrar que para todo C, la ecuación tiene exactamente una raíz real. Escribir las iteraciones del método de punto fijo (aplicado a la función g). Demostrar que este método converge si $|C| < \frac{14}{27}$ y diverge si $|C| > \frac{14}{27}$. ¿Cuál va a ser el orden de convergencia de este método? Definir el orden de convergencia.
b) Reescribimos la ecuación como $\frac{4}{3}x + 2x^3 - C = 0$ y le aplicamos el método de Newton. Escribir la fórmula de las iteraciones de este método. ¿Cuál va a ser el orden de convergencia? ¿Cómo podemos escoger el aproximante inicial para garantizar la convergencia?
c) Demostrar que, de hecho, se tiene la convergencia del método de Newton para cualquier valor de C y para todo aproximante inicial.

2. Para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ se considera la fórmula de cuadratura

$$I[f] = a(f(x) + f(-x)) + bf(y).$$

a) Encontrar $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ para que sea exacta para polinomios de grado menor o igual a 5.
b) Calcular el error al usar esta formula para evaluar $\int_{-1}^{1}(x^8 - x^6)dx$.
c) Escribir la correspondiente fórmula de integración compuesta para aproximar

$$\int_{-7}^{6} f(x)dx$$

usando una partición del intervalo $[-7, 6]$ con nodos equiespaciados.

3. Sea A una matriz cuadrada de un tamaño $m \times m$, representada como $A = M - N$, donde las matrices M, N son invertibles. Se plantean dos métodos iterativos para resolver el sistema $Ax = b$:

(1) $$Mx_{n+1} = Nx_n + b;$$

(2) $$Nx_{n+1} = Mx_n - b.$$

a) Demostrar que si en alguno de estos dos casos, los vectores aproximantes $x_n \in \mathbb{R}^m$ tienen un límite x, entonces $Ax = b$.
b) Demostrar que los métodos (1) y (2) no pueden converger a la vez. ¿Pueden los dos métodos ser divergentes?
c) Considerar el caso especial: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, donde $a, b \neq 0$ son parámetros reales. ¿Para qué valores de a y b converge el método (1)? ¿Para qué valores de a y b converge el método (2)?
d) Supongamos que para las matrices del apartado c), el método (1) converge. Demostrar que existe un $\rho \in (0, 1)$ tal que los errores $e_n = x_n - x$ satisfacen $\|e_n\|_2 = \rho^n \|e_0\|_2$ para todo n. ¿Es cierta esta afirmación para las p-normas, en vez de la 2-norma?

4.
a) Calcular la factorización QR (reducida) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) Sean A, V matrices reales arbitrarias de tamaños $m \times n$ y $n \times n$, respectivamente, tales que $\ker A = 0$, $\ker V = 0$. Ponemos $A_1 = AV$. Sean $A = QR$ y $A_1 = Q_1 R_1$ las respectivas factorizaciones reducidas. ¿Es cierto que siempre $QQ^T = Q_1 Q_1^T$?
c) (continuación) ¿Es cierto que siempre $Q = Q_1$?
