Cálculo Numérico I
1^o de Matemáticas y 2^o de la Doble Titulación en Informática y Matemáticas

CURSO 2016/17 — 28 DE JUNIO DE 2017 — EXAMEN FINAL

APELLIDOS, NOMBRE ____________________

DNI ____________________ GRUPO ____________

Hay que justificar todas las respuestas

1. Se considera la ecuación $x = g(x)$, donde $g(x) = te^{-x^2}$ y t es un parámetro positivo.

a) Demostrar que para todo $t > 0$, la ecuación tiene exactamente una raíz real. Escribir las iteraciones del método de punto fijo. ¿Para qué valores de t converge este método? Definir el orden de convergencia de un método iterativo. ¿Cuál va a ser el orden de convergencia del método de punto fijo?

b) Aplicamos ahora el método de Newton a la ecuación equivalente $x - te^{-x^2} = 0$. Escribir la fórmula de las iteraciones de este método y determinar su orden de convergencia. ¿Cómo podemos escoger el aproximante inicial x_0 para garantizar la convergencia?

2. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & u & -uv \\ -1 & 1 & v \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $u, v \in \mathbb{R}$.

a) Investigar la convergencia de los métodos iterativo de Jacobi y de Gauss-Seidel, aplicado al sistema lineal $Ax = b$ (con un dato b), para el caso de los parámetros $u = 1/3$, $v = 2/3$.

b) ¿Para qué valores de u y v converge el método de Jacobi?

c) ¿Para qué valores de u y v converge el método de Gauss-Seidel? ¿En qué casos solo hace falta un número finito de iteraciones para llegar a la solución exacta?

d) Dar un ejemplo de parámetros (u, v) tales que el método de Jacobi converge y el método de Gauss-Seidel diverge, y otro ejemplo, en el que el método de Jacobi diverge y el método de Gauss-Seidel converge.

3. Dados $c > 0$, $n \geq 2$ y $a < b$, sean $f(x) = e^{cx}$ y $\{x_k\}_{k=1}^n \subset [a, b]$ puntos equiespaciados tales que $x_1 = a, x_n = b$.

a) Escribir explícitamente x_k en función de k, a, b y n. Demostrar que existe un único polinomio p_{n-1} de grado menor o igual a $n - 1$ que satisface

$$p_{n-1}(x_k) = f(x_k) \quad \text{para todo } k = 1, \ldots, n\,.$$

b) Dar una estimación del error $E = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_{n-1}(x)|$, en función de a, b, c y n.

c) Sea $-1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ una partición del intervalo $[-1, 1]$ en N subintervalos iguales. *El spline lineal* $s(x)$ se define por las siguientes condiciones:

- la función $s(x)$ es continua en $[-1, 1]$;
- la función $s(x)$ es lineal en cada uno de los subintervalos $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2, \ldots, N$, y $s(t_k) = f(t_k)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, N$.

Estimar el error $e_N = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - s(x)|$.
Indicación: Aplicar el apartado b) a cada uno de los subintervalos $[t_{j-1}, t_j]$, poniendo $n = 2$.
Demostrar que $e_N \to 0$ cuando $N \to \infty$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ la matriz dada por $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Encontrar las matrices $Q \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ de la factorización (reducida) $A = QR$.

b) Sea $M = \mathrm{Im}(A)$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por la imagen de A, y sea $\mathbb{P}_M$ la proyección ortogonal sobre M. Escribir la matriz de la aplicación $\mathbb{P}_M$.

c) Sea $b = (3, 9, 6)^t$. Encontrar $v \in M$ tal que $\|v - b\|_2 \leq \|v' - b\|_2$ por todo $v' \in M$.