CÁLCULO 1: 1^{er} curso del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 8: la integral de Riemann

1.- Probar que la función $y = [x]$ es integrable en $[0, 5]$ y calcular $\int_0^5 [x]\, dx$.

2.- Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+n)}} \right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,n + k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)\,k}{n^3}.$$

3.- Sea f una función continua en $[a, b]$, no negativa, y que cumple $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Probar que f es cero en todos los puntos.

4.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo $[a, b]$, no integrable, y tal que f^2 sea integrable.

5.- Sea una función continua en $[a, b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a, b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre $[a, b]$. Demostrar que $m \leq E(f) \leq M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado: Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c).$$

(c) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Hallar $E(f)$ sobre $[-a, a]$. Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar $\int_{-a}^{a} x^7 \operatorname{sen}(x^4)\, dx$.

6.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1], \\ x + 1 & \text{si} \quad x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Definimos F con $F(0) = 0$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, si $x \in (0, 2]$. Determinar F de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0, 2]$, aunque f no lo sea.

7.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\, \log(1 + t^2)\, dt, \quad G(x) = \int_{x^2}^{1} \cos^2 t^2\, dt, \quad H(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2\,t^2))\, dt.$$

8.- (*) Encontrar una función f definida y continua en $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1 + t)\, f(t)\, dt = 6\, x^4.$$

9.- Sea $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3, \\ x + a & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a a para que exista una función F en $[0, 4]$ con $F'(x) = f(x)$? Encontrar todas las funciones F posibles que cumplan la condición anterior.

10.- Calcular las primitivas siguientes:

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ (3) $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{2x}}{e^{3x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int a^x\,dx$ (5) $\displaystyle\int (\tan x)^2\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$

(7) $\displaystyle\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}\,dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

11.- Calcular las primitivas siguientes, usando la fórmula de integración por partes:

(1) $\displaystyle\int x^2e^x dx$ (2) $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx$ (3) $\displaystyle\int (\ln x)^3\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$ (5) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$ (6) $\displaystyle\int x(\ln(x))^2 dx$

12.- Calcular las primitivas siguientes, usando el cambio de variables adecuado en cada caso:

(1) $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen}(e^x)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ (5) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \ln(\cos x)\tan x\,dx$

13.- Calcular las primitivas siguientes, usando cambios de variable trigonométricos:

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ (5) $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

14.- Calcular las primitivas siguientes, mediante descomposición en fracciones simples:

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$ (5) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+x+1}\,dx$

15.- Calcular las primitivas siguientes:

(1) $\displaystyle\int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,x^2+8}$ (3) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2+2\,x-1}{x+2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+4}\,dx$

(7) $\displaystyle\int x^3\,\sqrt{x^2-1}\,dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (9) $\displaystyle\int x^2\,\sqrt{1+x}\,dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}$ (11) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3-3\,x+2}\,dx$ (12) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-x^2+4\,x-4}\,dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{e^x+3\,e^{-x}}{e^{2\,x}+1}\,dx$ (14) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3\,\cos x}$ (15) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

(16) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$ (17) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$ (18) $\displaystyle\int \frac{x^5+2\,x+1}{x^4+2\,x^2+1}\,dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+3)}$ (20) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (21) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

(22) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (23) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos x}$ (24) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

(25) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ (26) $\displaystyle\int \log x\, dx$ (27) $\displaystyle\int x\, \log x\, dx$

(28) $\displaystyle\int x^2\, \operatorname{sen} x\, dx$ (29) $\displaystyle\int x^3\, e^{-2\,x}\, dx$ (30) $\displaystyle\int \cos(2\,x)\, e^{3\,x}\, dx$

(31) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, \cos^6 x\, dx$ (32) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\, \cos^6 x\, dx$ (33) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2\,x)\, \cos(5\,x)\, dx$

(34) $\displaystyle\int \arctan x\, dx$ (35) $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ (36) $\displaystyle\int x^2\, \operatorname{arc\,cos} x\, dx$

16.- (*)

(a) Hallar $\int \tan x\, dx$, $\int \tan^2 x\, dx$. Expresar $\int \tan^n x\, dx$ en términos de $\int \tan^{n-2} x\, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^8 x\, dx$ y para $\int \tan^7 x\, dx$.

(b) Hallar $\int \sec^2 x\, dx$, $\int \sec^3 x\, dx$. Expresar $\int \sec^n x\, dx$ en términos de $\int \sec^{n-2} x\, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^6 x\, dx$ y para $\int \sec^7 x\, dx$.

17.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x}{x^2-x-2}\, dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$ (4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\, dx$

(5) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\, \log^2 x}$ (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{4+x^2}\, dx$ (7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}}$ (8) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

18.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(1) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\, x^\alpha dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{2\,x+(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^\alpha\, x}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$ (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh x}\, dx$ (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$

19.- (*)

(a) Usar la fórmula de integración por partes para demostrar la fórmula de reducción

$$\int x^\alpha\, e^{\beta\,x}\, dx = \frac{1}{\beta}\, x^\alpha\, e^{\beta\,x} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\, e^{\beta\,x}\, dx, \quad \textit{para} \quad \alpha>0, \quad \beta\neq 0.$$

(b) La función Γ se define para $x>0$ como $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$. Demostrar que se tiene $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Deducir entonces que $\Gamma(n+1) = n!$.

20.-

(a) Para todo número n entero no negativo, definimos $I(n) = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x)^n\, dx$. Utilizando la integración por partes, demostrar que $I(n) = \frac{n-1}{n} I(n-2)$.

(b) Demostrar que $\displaystyle I(2n) = \pi \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$ y que $\displaystyle I(2n+1) = 2\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$.

(c) Demostrar que la sucesión $\{I(n)\}$ es decreciente. Utilizando este hecho, demostrar *la fórmula de John Wallis para* π:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^\infty \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \ldots\ .$$

Observación: De forma análoga a las series, el producto infinito se define por $\prod_{k=1}^\infty c_k = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n c_k$.

21.-

(a) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 8 - x^2$, $g(x) = x^2$.

(b) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 1/(x^2+1)$, $g(x) = \dfrac{1}{2}|x|$.

(c) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\,e^{-x}$, $y = x^2\,e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.

(d) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$, su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.

22.- Sea $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$, y sea G su función inversa. Hallar $G'(0)$.

23.- (*) Sean f, g continuas, con $f \geq 0$ y g creciente. Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt + g(b)\int_c^b f(t)dt.$$

24.- (*) Calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen} x + x - 4}{\cos x + 2}dx$$