CÁLCULO 1: 1^{er} curso del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 3: Series numéricas.

1.- Sea $\sum a_k$ una serie de términos no negativos. Sea $\sum b_k$ una serie de términos positivos y supongamos que $a_k/b_k \to 0$.
a) Demostrar que si $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
b) Demostrar que si $\sum a_k$ diverge, entonces $\sum b_k$ diverge.
c) Mediante un ejemplo, demostrar que si $\sum a_k$ converge, entonces $\sum b_k$ puede converger o diverger.
d) Demostrar mediante un ejemplo que si si $\sum b_k$ diverge, entonces $\sum a_k$ puede converger o diverger.

2.- Demostrar que las series siguientes divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{k-2}}{3^k}.$$

3.- Determinar si las siguientes series convergen o divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4-k^3+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{\sqrt{k+1}}.$$

4.- Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum \frac{10^k}{k!}$ (b) $\sum \frac{1}{k\,2^k}$ (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$

(d) $\sum \frac{n!}{100^n}$ (e) $\sum \frac{(\log k)^2}{k}$ (f) $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots$

(g) $\sum k \left(\frac{2}{3}\right)^k$ (h) $\sum \frac{1}{1+\sqrt{k}}$ (i) $\sum \frac{2\,k+\sqrt{k}}{k^3+2\,\sqrt{k}}$

(j) $\sum \frac{k!}{10^{4\,k}}$ (k) $\sum \frac{k^2}{e^k+1}$ (l) $\sum \frac{2^k\,k!}{k^k}$

(m) $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$ (n) $\sum \frac{1}{n\,(\log n)^{\frac{1}{2}}}$ (ñ) $\sum \frac{1}{n\,\log n (\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$

(o) $\sum \frac{(k!)^2}{(2\,k)!}$ (p) $\sum \frac{45}{1+100^{-n}}$ (q) $\sum \frac{\log n}{n^2}$

(r) $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,)$ (s) $\sum(\sqrt[n]{n} - 1)^n$ (t) $\sum \frac{1}{2^{\log n}}$

5.-
a) Sea f una función creciente. Demostrar

$$f(1) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(2) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

b) Aplicar la fórmula anterior con $f(x) = \log x$ para probar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

c) Usar el apartado anterior para demostrar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

6.- Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n}\,,$$

según los valores de $a > 0$.

7.- Una oruga avanza por una cuerda elástica de 100 metros de largo a una velocidad de 1 m/h. Cada hora, alguien estira 100 metros la cuerda de forma homogénea. ¿Llegará alguna vez la oruga al final de la cuerda?

8.- Dos locomotoras se desplazan en línea recta, en sentido contrario, a 30 km/h partiendo de dos puntos a una distancia de 180 km. Una paloma sale de uno de los puntos a 60 km/h en dirección a la locomotora que viene en sentido opuesto. Cuando llega a la misma, gira y se dirige hacia la otra locomotora, y va repitiendo el proceso indefinidamente. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido hasta que las locomotoras se encuentren? ¿Cuántos en cada sentido?

9.- Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n\,(n+2)}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3\,n+1}{n\,(n+1)\,(n+2)}\,.$$

10.- Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ es convergente.

(b) Si para todo n, $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ es convergente.

(c) Si para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n\, a_n$ es convergente.

(d) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n\, a_n$ es convergente.

11.- Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

12.- Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, \frac{k^k}{3^k\, k!}\,, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k\, \frac{1}{k\,\log k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\,.$$

13.- Identificar la función

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \big(\lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k} \big).$$

(Esta función juega un papel importante en la teoría de la integral de Riemann).