Cálculo 1: 1^{er} curso del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 2: Sucesiones

1.- Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

(a) $\left\{\frac{n^2}{n+2}\right\}$ (b) $\left\{\frac{n^3}{n^3+2n+1}\right\}$ (c) $\left\{\frac{n}{n^2-n-4}\right\}$

(d) $\left\{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2}\right\}$ (e) $\left\{\frac{\sqrt{n^3+2n}+n}{n^2+2}\right\}$ (f) $\left\{\frac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}}\right\}$

(g) $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}\right\}$ (h) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}$ (i) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

(j) $\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}$ (k) $\left\{\frac{2^n}{4^n+1}\right\}$ (l) $\left\{\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right\}$

(m) $\left\{\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}\right\}$ (n) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$ (ñ) $\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right\}$

2.-

(a) Utilizar la igualdad $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ para simplificar la expresión $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

(b) Como aplicación calcular el límite de la sucesión

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

3.- (*) Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n+n}{n^2+n}\right).$$

4.- Sea $a>1$. Se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n=\sqrt{a\cdot a_{n-1}}$, $a_1=\sqrt{a}$. Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

5.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales definida por $a_{n+1}=\sqrt{2\,a_n+3}$, sabiendo que a_1 es un número mayor que $-\frac{3}{2}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso $a_1\geq 3$ y $a_1<3$.

6.- Sea $a_1=1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

(a) $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n$, (b) $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}a_n$, (c) $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$, (d) $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}a_n$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

7.- Se define recurrentemente la sucesión $a_1=a>0$ y $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$. ¿Es convergente la sucesión?

8.- Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, existe una sucesión $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

9.-
a) (*) Demostrar que la sucesión

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

es monótona creciente y está acotada superiormente. Por consiguiente, tiene un límite, que denotamos por e. *Indicación: Puede ser útil tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton,* $(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^k$, *donde* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, *y* $0! = 1$.
b) (**) Demostrar que si $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

10.- Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

11.- (*)

(a) Probar por inducción que para $n = 1, 2, \ldots$ se tienen las desigualdades

$$2^{n-1}n! \leq n^n \leq e^{n-1}n!$$

Indicación: Tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton.

(b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

12.- Hallar los siguientes límites
a) $\lim_{n\to\infty}(n^3-1)^{\frac{1}{3n}}$
b) $\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)$.
c) (*) $\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)$.
d) (**) $\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$.

13.- Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

(a) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ (b) (*) $1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$, (c) (*) $2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}$.

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

14.- La sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ cumple que, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.