(*Este examen consta de 5 ejercicios y tiene una duración de 3 horas*) 9 de enero de 2023

Las soluciones deben estar razonadas, se debe comentar el procedimiento empleado y nombrar los teoremas y resultados utilizados.

1) Sea $\alpha \in (0,1)$ un número real fijo. Demuestra que la siguiente sucesión tiene límite:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= (a_n+1)^\alpha \quad \forall n \geq 1 \\ a_1 &= 1 \end{cases}$$

2) (a) Investiga la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n(\log n)^a}$ en función del parámetro real a.

(b) Investiga la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n\sqrt{n}}$.

3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Demuestra que existe un x tal que $f(x) = f(x-1)$.

Indicación: Utiliza la continuidad de la función $f(x)-f(x-1)$ y el método de la reducción al absurdo.

4) Sea $f(x) = e^x \cos(x)$. Demuestra que existe un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$ donde f es inyectiva y donde su inversa es derivable. Calcula $(f^{-1})'(1)$ donde f^{-1} es la función inversa de f en el intervalo encontrado antes.

5) Estudia la convergencia de la integral $\int_1^\infty x^a \sin x \, dx$, donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante.

Indicación: Para $a < 0$ utiliza la integración por partes.

Soluciones

1) Vamos a desmotrar que la sucesión a_n es monótona creciente y está acotada.
Primero demostramos que es creciente. Observamos que

$$a_2 = (a_1+1)^\alpha = 2^\alpha > 1,$$

así que tenemos $a_1 \leq a_2$. Vamos a demostrar que $a_n \leq a_{n+1}$ por inducción (el caso base lo acabamos de demostrar). Si suponemos (hipótesis inductiva) que $a_n \leq a_{n+1}$, entonces

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1+a_n)^\alpha \\ &\leq (1+a_{n+1})^\alpha \\ &= a_{n+2} \end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis de inducción para pasar de la primera a la segunda línea. Esto demuestra que la sucesión es monótona creciente.

Para demostrar que está acotada primero vemos qué pasa con algún caso particular. Por ejemplo si $\alpha = 1/2$ e intentamos demostrar por inducción que a_n está acotada por 3, entonces

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \leq \sqrt{3+1} = 2 \leq 3.$$

Sin embargo, si probamos con $\alpha = 1$ vemos que

$$a_{n+1} = a_n + 1,$$

que junto con $a_1 = 1$ implica que $a_n = n$, que no está acotada. El caso $\alpha = 1$ no está en nuestras hipótesis, pero nos dice algo y es que la cota probablemente dependa de cómo de cerca esté α de 1.
Sea M un número real, esta va a ser nuestra cota. Para que funcione el método de inducción necesitaríamos que funcionase

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1 + a_n)^\alpha \\ &\leq (1 + M)^\alpha && \text{(Hipótesis de inducción)} \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Es decir, nos basta encontrar un $M \geq 1$ tal que

$$(1 + M)^\alpha \leq M.$$

No hace falta encontrar un M explícito, solo demostrar que existe. Para demostrar que existe basta observar que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(1+m)^\alpha}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\left(1+m^{-\alpha}\right)^\alpha}{m^{1-\alpha}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^{1-\alpha}} = 0.$$

Así que, por la definición de límite, vemos que existe un m_0 a partir del cual

$$\frac{(1+m)^\alpha}{m} \leq 1$$

para todo $m \geq m_0$. Nos basta tomar $M = m_0$.
Con esto hemos demostrado que (a_n) es monótona creciente y acotada, y por lo tanto -por el teorema visto en clase al respecto- es convergente.

2 (a) Observamos que $\cos(\pi n/3)$ para $n \in \mathbb{N}$ toma valores $\pm 1/2$ y ± 1. Luego

$$\frac{1}{2n(\log n)^a} \leq \left|\frac{\cos(\pi n/3)}{n(\log n)^a}\right| \leq \frac{1}{n(\log n)^a}.$$

Por tanto, por el teorema de comparación, la convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n(\log n)^a}$ equivale a la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}$. Utilizando el criterio integral de convergencia, vemos que esta última serie converge si y solo si $a > 1$.
La serie converge para todo $a \in \mathbb{R}$. Efectivamente, pongamos $b_n = \cos(\pi n/3)$ y $c_n = \frac{1}{n(\log n)^a}$. Como la sucesión b_n es periódica con el periodo 6 (es decir, $b_{n+6} = b_n$ para todo n) y suma cero sobre el período: $\sum_{n=2}^{7} b_n = 0$, se sigue que la sucesión de sus sumas parciales $B_n = \sum_{k=2}^{n} b_k$ es periódica. Luego $\{B_n\}$ son acotadas. Por otro lado, poniendo $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^a}$, vemos que

$$f'(x) = \frac{(\log x)^{a-1}(a + \log x)}{x^2(\log x)^{2a}} < 0$$

si $x \geq M$, donde $M > 0$ es un número real. Se sigue que la sucesión $c_n = f(n)$ decrece para $n \geq M$. Por el criterio de Dirichlet, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n(\log n)^a} = \sum_{n=2}^{\infty} b_n c_n$$

converge para todo $a \in \mathbb{R}$.
Respuesta: La serie converge absolutamante para $a > 1$ y converge condicionalmente para cualquier $a \in (-\infty, 1]$.

2 (b) Calculamos primero el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$. Observamos que

$$n \log \frac{n}{n+2} = -\frac{2n}{n+2} \frac{\log(1 - \frac{2}{n+2})}{-\frac{2}{n+2}} \to -2$$

cuando $n \to \infty$ (porque $\frac{\log(1+x)}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$). Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = e^{-2}$. Luego existe N_0 tal que $\left(\frac{n}{n+2}\right)^n < e^{-1}$ para todo $n \geq N_0$.

Sabemos que $\frac{e^{-x}}{x^{-4}} = \frac{x^4}{e^x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Poniendo $x = \sqrt{n} \to \infty$ ($n \to \infty$), vemos que existe un $N_1 > N_0$ tal que

$$\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n\sqrt{n}} < \left(e^{-1}\right)^{\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{n}} < \frac{1}{(\sqrt{n})^4} = \frac{1}{n^2}$$

si $n \geq N_1$. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n\sqrt{n}}$ tiene términos no negativos. Como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por el teorema de comparación, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n\sqrt{n}}$ converge también.

3) Consideremos la función $h(x) = f(x) - f(x-1)$; es continua en $\mathbb{R}$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que la ecuación $h(x) = f(x) - f(x-1) = 0$ no tiene raíces. Entonces $h(x)$ no cambia del signo en $\mathbb{R}$.
Primer caso: $h(x) > 0$ para todo x. Entonces $f(n) > f(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se sigue que $\ldots < f(-3) < f(-2) < f(-1) < f(0)$, luego $f(n) < f(0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Esto contradice a la hipótesis $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to -\infty$.
Segundo caso: $h(x) < 0$ para todo x. Entonces $f(n) < f(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En este caso, obtenemos $f(0) > f(1) < f(2) < \ldots$, luego $f(n) < f(0)$ para todo $n \in Z$, $n > 0$. Esto contradice a la hipótesis $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$.
Como en los dos casos hemos llegado al absurdo, concluimos que h tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}$.

4) Observamos primero que

$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) > 0$$

en el intervalo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Luego f es estrictamente creciente en este intervalo. Como f es continua, es biyectiva como la función del intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ al intervalo $[f(-\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{4})]$. Por tanto, podemos poner $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$. La función inversa f^{-1} manda el intervalo $\left(f(-\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{4})\right)$ en el intervalo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Según la fórmula vista en clase, para todo y en $\left(f(-\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{4})\right)$, existe la derivada

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

En particular,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

5) La convergencia de la integral impropia $\int_1^\infty x^a \sin x\,dx$, por definición, equvale a que la función

$$I(R) = \int_1^R x^a \sin x\,dx$$

tiene límite finito cuando $R \to \infty$.

a) Si $a < 0$, utilizamos la integración por partes, poniendo $u = x^a$, $dv = \sin x\,dx$, con lo que obtenemos $du = ax^{a-1}\,dx$, $v = -\cos x$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R x^a \sin x\,dx = -\lim_{R\to\infty} R^a \cos R + 1^a \cos 1 + a \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{a-1} \cos x\,dx.$$

Dado que $|R^a \cos R| \le R^a \to 0$ cuando $R \to \infty$, vemos que $\lim_{R\to\infty} R^a \cos R = 0$. Como $a - 1 < -1$,

$$\int_1^\infty |x^{a-1} \cos x|\,dx \le \int_1^\infty x^{a-1}\,dx < +\infty$$

(visto en clase). Luego la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty x^{a-1} \cos x\,dx$ converge, es decir, existe el límite

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{a-1} \cos x\,dx$$

y es finito.

Conclusión: La integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty x^a \cos x\,dx$ converge para todo $a < 0$.

b) Si $a \ge 0$, la integral impropia diverge. Efectivamente, si $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 1$, entonces

$$I(2\pi n + \pi) - I(2\pi n) = \int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} x^a \sin x\,dx \ge \int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{x=2\pi n}^{x=2\pi n+\pi} = 2.$$

Si existiese el límite $\lim_{R\to\infty} I(R)$, tendríamos $I(2\pi n + \pi) - I(2\pi n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo que es imposible según el cálculo anterior.

Observación: En general, la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$ puede converger incluso si la función $f(x)$ no tiende a 0 cuando $x \to \infty$. Por ejemplo, la integral $\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx$ converge, porque el cambio de variables $x = \sqrt{t}$ y la reduce a la integral convergente $\int_1^\infty t^{-1/2} \sin t\,dt$.