Sobre la definición del cuerpo de números complejos (un extracto de la memoria del curso "Variable Compleja I")

Dmitry V. Yakubovich

0. Sobre esta memoria (introducción para el profesor)

La asignatura de Variable Compleja es una de las materias en las que más puede el estudiante apreciar la belleza de las Matemáticas y la fortaleza del razonamiento lógico.

Estos apuntes pretenden desarrollar la asignatura conforme al programa del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid. El autor impartió estas clases en los años académicos 2003/04 y 2004/05. Anteriormente ha impartido un curso parecido en la Universidad Estatal de San Petersburgo (también dos veces).

El programa de la licenciatura de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid incluye el curso troncal "Variable Compleja I", que se imparte en el tercer año de los estudios, y el curso optativo "Variable Compleja II", que se imparte en el cuarto año. La presente memoria corresponde al curso cuatrimestral "Variable Compleja I". Está pensada para servir de ayuda a los estudiantes.

0.1. Aspectos generales y dificultades de la asignatura

Cuando uno prepara este curso, se encuentra, con cierto asombro, con que la exposición rigurosa de la Variable Compleja no es una tarea fácil, que, además, se tiene que compaginar con otros objetivos muy deseables, tales como la transparencia y la brevedad de exposición de la teoría. Éstas son algunas de las dificultades:

1) El curso se apoya en algunos resultados de la Topología que no se han visto todavía (sobre todo, los relacionados con el Teorema de Jordan).

2) Las partes teóricas más importantes para la resolución de problemas son, en nuestra opinión, las series de Laurent y la fórmula de residuos. Sin embargo, estos temas aparecen sólo al final del curso, cuando ya escasea el tiempo.

3) Según nuestra experiencia, no todos los estudiantes manejan con destreza las propiedades elementales de números complejos (que en realidad, sólo se usan ocasionalmente en los cursos anteriores).

En el proceso de redacción de esta memoria hemos intentado tomar en cuenta estas dificultades.

0.2. Uso de programas informáticos en la enseñanza del tema "Transformaciones conformes"

El autor de esta memoria ha desarrollado un paquete de programas denominado "Transformaciones conformes" usando **MatLab**. Este paquete sirve para visualizar transformaciones conformes definidas mediante fórmulas. Se ha utilizado con bastante éxito las dos veces que este programa fue impartido en la Universidad Autónoma de Madrid.

Incluimos una descripción de este programa y su uso en el Apéndice 2.

Se pueden contemplar dos posibles usos de este paquete:

Primero, el profesor puede utilizarlo con el proyector ("cañon"), conectado a un ordenador portátil. Según la experiencia, ésto ayuda a aumentar el interés del estudiante. Es muy útil también en el primer momento cuando se dan las definiciones y se explican las propiedades geométricas de función holomorfa y de transformación conforme, incluso antes del estudio sistemático de tales transformaciones.

Segundo, aparte de este uso, se puede introducir como **prácticas de laboratorio** para resolver problemas en que se pida encontrar una fórmula matemática para una transformación conforme del disco a un dominio dado y visualizar esta transformación, así como todas las transformaciones intermedias. El programa de MatLab está pensado para una fácil implementación de estas tareas.

Es posible también incluir estas prácticas en el curso "Variable Compleja II".

En los sitios web [1], [2], uno puede encontrar visualizaciones relacionadas la mecánica de fluidos y aerodinámica. Matemáticamente, estos temas se estudian con los métodos de la Variable Compleja, en particular, utilizando transformaciones conformes.

Durante el curso 2004/05 hemos incluído en nuestro curso unas prácticas de este tipo. Se dieron dos clases en el laboratorio informático, en las que explicamos el uso del programa a los estudiantes y distribuimos una lista de 22 dominios simplemente conexos. A cada estudiante se le pidió encontrar (y visualizar) las transformaciones conformes del disco unidad sobre un par de estos dominios y todos los pasos intermedios.

Cabe destacar que para utilizar este programa, no se necesitan conocimientos profundos de MatLab.

Los resultados de estas prácticas fueron bastante positivos. Aproximadamente un tercio de los estudiantes que asistían a las clases ha podido desarrollar correctamente esta tarea, tanto desde el punto de vista matemático como de programación.

1. Sucesiones y series con términos complejos

Hemos de precisar cómo se entiende la convergencia de las sucesiones y de las series complejas. Afortunadamente, aquí hay pocas diferencias con el caso real.

Definición. Una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos *converge a un número complejo* b si $|z_n - b| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por tanto, la definición de la convergencia en $\mathbb{C}$ es la misma que en $\mathbb{R}^2$. Se tiene que $z_n \to b$ si y sólo si convergen las partes reales e imaginarias: $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} b$ y $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} b$.

Definición. Se dice que $s \in \mathbb{C}$ *es la suma de una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con términos complejos si las sumas parciales s_n de la serie convergen a s cuando $n \to \infty$.

Recordamos que las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se definen como

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Como vemos, las definiciones son las mismas que en el caso real. Los siguientes análogos de teoremas de la variable real serán los que más vamos a utilizar.

Definición. Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con términos complejos *converge absolutamente* si converge la serie compuesta de los módulos de a_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Teorema 1.1. *Si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge absolutamente, entonces esta serie converge y se tiene que*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Teorema 1.2. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

El recíproco es falso.

Recordemos también la noción del límite superior de una sucesión **real**. Dados $t_n \in \mathbb{R}$, se definen

$$T_n = \sup\{t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots\}, \qquad \limsup_{n\to\infty} t_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim T_n.$$

Se ve que la sucesión $\{T_n\}$ es decreciente, por tanto, $\limsup_{n\to\infty} t_n$ siempre existe; es un número real ó bien es igual a $-\infty$ o a $+\infty$. Es igual a $+\infty$ si la sucesión $\{t_n\}$ no está acotada superiormente; en este caso $T_n = +\infty$ para todo n.

Se puede demostrar que siempre existe una subsucesión de la sucesión $\{t_n\}$ cuyo límite es igual al límite superior de $\{t_n\}$; es más, el límite superior de una sucesión es igual al *mayor* de los límites de sus subsucesiones.

Mencionaremos la siguiente propiedad:

$$\limsup(a_n b_n) = \big(\lim a_n\big)\big(\limsup b_n\big), \tag{1.1}$$

que se cumple si $a_n \geqslant 0$ y $\exists \lim a_n < \infty$.

Teorema 1.3 (Criterio de convergencia de Cauchy)**.** *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie compleja. Sea*

$$C = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}. \tag{1.2}$$

Si $C > 1$, entonces la serie diverge. Si $0 \leqslant C < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

Teorema 1.4 (Criterio de convergencia de D'Alembert)**.** *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie compleja. Supongamos que existe el límite*

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}. \tag{1.3}$$

Si $D > 1$, entonces la serie diverge. Si $0 \leqslant D < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

Hemos visto estos criterios para el caso real en el curso anterior del Cálculo. Las demostraciones se basan en los Teoremas 1.1 y 1.2 y se dejan como ejercicios.

En los casos $C = 1$ o $D = 1$, la serie puede tanto converger como diverger.

Nótese que el límite (1.2), siendo un límite superior, siempre existe, mientras que el límite (1.3) puede que no exista.

Si el límite (1.3) existe, entonces $D = C$.

Los criterios de convergencia condicional, tales como el criterio de Dirichlet y el criterio de Abel, también siguen siendo ciertos para series complejas.

Ejercicios. Investigar la convergencia de las series

$$\textbf{(a)} \sum \frac{n}{(3i)^n}; \quad \textbf{(b)} \sum \frac{n!}{(in)^n}; \quad \textbf{(c)} \sum \frac{1}{e^{in}}; \quad \textbf{(d)} \sum \frac{1}{ne^{in}}.$$

Indicar los casos en que se tiene la convergencia absoluta.
Nota: en (d), se aplica el criterio de Dirichlet de convergencia de las series.

2. Funciones analíticas de variable real y de variable compleja

El Análisis Complejo forma parte del Análisis Matemático, pero tiene sus particularidades. Es, quizás, una de sus partes más bellas. Muchos fenómenos de la variable real sólo se explican bien desde el punto de vista de la variable compleja.

Recordemos que en la teoría de funciones de la variable real, la misma elección del conjunto de funciones que se van a estudiar ya presenta una cierta dificultad.

Al final se adoptan varias definiciones con una especificación del grado de suavidad, es decir, del número de derivadas existentes. Se definen las clases C^k de funciones sobre un intervalo como clases de funciones cuyas k primeras derivadas existen y son continuas. Todas estas clases son diferentes; por ejemplo, la función $f(x) = |x| \cdot x^k$ está en $C^k(\mathbb{R})$, pero no está en $C^{k+1}(\mathbb{R})$. Diferentes teoremas del Cálculo tienen como hipótesis la existencia de un número determinado de derivadas. Por ejemplo, para definir un polinomio de Taylor de grado n de una función en un punto se necesita que esta función tenga n derivadas en este punto.

Una herramienta más poderosa que el polinomio de Taylor es una serie de Taylor. Se ha visto en la teoría de la variable real que toda función elemental se desarrolla en una serie de Taylor en un entorno de todo punto interior de su dominio de definición. Recordemos la fórmula para la serie de Taylor de la función f en el punto a:

$$T_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \tag{2.1}$$

Decimos que una función f se desarrolla en un entorno de a en una serie de Taylor si f tiene infinitas derivadas en a y existe un entorno $(a-\delta, a+\delta)$ del punto a tal que para todo x en este entorno, la serie (2.1) converge y su suma $T_{f,a}(x)$ coincide con el valor $f(x)$. Las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ se desarrollan en una serie de Taylor en un entorno de cualquier a real, la función $\log x$ en un entorno de cualquier a positivo, y la función $\operatorname{arc\,sen} x$ en un entorno de cualquier a en el intervalo $(-1, 1)$.

Recordemos algunos de estos desarrollos en puntos a concretos:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \tag{2.2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \tag{2.3}$$

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \ldots \tag{2.4}$$

En desarrollos (2.2) y (2.3), $a = 0$, y en (2.4), $a = 1$.

Definición. Una función $f : U \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto abierto U en el eje real, se llama *analítica real*, si todo punto a en U tiene un entorno, donde f coincide con su desarrollo de Taylor en a.

Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge en un entorno de punto a a una función f, es en realidad la serie de Taylor de f en a. Por lo tanto, en esta definición en vez de hablar de los desarrollos de Taylor de f podemos pedir simplemente que cada punto a en U tenga un entorno donde f se represente por *alguna* serie de potencias.

Recordemos que no toda función infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$ satisface la anterior definición. Un ejemplo más conocido es la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Para esta función, $T_{f,0}(x)$ converge en todo el eje real,[1] pero $T_{f,0}(x) \neq f(x)$ para

[1] De hecho, $T_{f,0}(x) \equiv 0$, porque $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n.

$x \neq 0$.

Si nos restringimos a funciones analíticas reales, existen también diferencias apreciables entre ellas. Por ejemplo, las dos funciones e^x y $\operatorname{arc\,tg} x$ son analíticas reales sobre todo el eje $\mathbb{R}$. Sin embargo, el desarrollo (2.2) converge para todo x, y el desarrollo (2.3) sólo converge para $|x| \leqslant 1$. Desde el punto de vista de la variable real, no se ve ninguna razón para ello. En nuestro curso veremos una clara y sorprendente explicación de este fenómeno en términos de la teoría de la variable compleja

Una observación básica para comenzar el estudio de funciones de la variable compleja consiste en lo siguiente: Supongamos que f es una función analítica real y a es un punto de su dominio de definición; escribamos el desarrollo de Taylor de f en a. Según la definición, f coincide con su desarrollo de Taylor en algún intervalo $(a-\delta, a+\delta)$. Entonces es fácil ver que la serie $T_{f,a}$ también converge, si la evaluamos en un número z complejo, siempre y cuando $|z-a| < \delta$. Esta observación nos permite *extender el dominio de definición de* f, poniendo $f(z) = T_{f,a}(z)$ para puntos z con la propiedad indicada.

Estos comentarios, que necesitan de hecho una mayor precisión, sugieren la siguiente

Definición. Una función $f : W \to \mathbb{C}$, definida en un subconjunto abierto W del conjunto de números complejos, se llama *analítica*, si todo punto z_0 en W tiene un entorno, donde f se desarrolla en una serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Como veremos más adelante, todas las funciones elementales tienen extensiones analíticas a ciertos dominios en el plano complejo. Las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ se extienden a todo el plano complejo.

Según el esquema usual de desarrollo de un curso de análisis real, primero se estudia la diferenciación y luego la integración, ya que la mayor parte de la teoría de diferenciación no depende de la integración. Nuestro estudio del análisis complejo va a seguir las siguientes líneas:

1) El repaso de propiedades elementales de números complejos.
2) Diferenciación de funciones complejas.
3) Aspectos geométricos de la teoría (transformaciones conformes).
4) La integración de funciones complejas.

A pesar de la similitud, las partes de la teoría compleja están lógicamente mucho más relacionadas entre sí. De hecho, sólo después de demostrar los principales resultados sobre la integración (el teorema de Cauchy y la fórmula de Cauchy) seremos capaces de entender bien la diferenciación.

La teoría de la variable compleja se usa en muchos campos de las ciencias exactas y de la tecnología. Quiero mencionar, por ejemplo, *la transformada de Laplace*. Si f es una función en $[0, \infty)$, que no crece más que exponencialmente, su transformada

de Laplace se define como

$$(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty e^{-tz} f(t)\, dt.$$

Es una función analítica de z si Re z es suficientemente grande.

La transformada de Laplace es una pariente más próxima de la transformada de Fourier. Está definida en un semiplano del tipo $\{\mathrm{Re}\, z > \alpha\}$, donde el número α depende del orden de crecimiento de f. Proporciona información sólo si permitimos darle a z valores complejos, y es una herramienta básica en varios campos de ingeniería, por ejemplo, en la teoría de control y la teoría de la señal. La variable compleja se usa también en la teoría de probabilidades y estadística, en la electrostática, en la hidrodinámica, en la mecánica cuántica; de hecho, difícilmente se encuentra un área tecnológica donde no se use en absoluto.

3. Historia de análisis complejo

La historia de la invención de análisis es relativamente reciente; Newton y Leibniz son unos de los principales descubridores. La exposición adoptada en los cursos universitarios modernos no siempre sigue la historia del desarrollo de la materia. Los planteamientos de Isaac Newton (1643–1727) y en menor medida de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) estuvieron muy motivados por las aplicaciones; por ejemplo, Newton descubrió desde el principio un método muy general para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales, representándolas como series de potencias con coeficientes indeterminados. Él aplicaba este método en su Mecánica.

Los números imaginarios surgieron por primera vez en relación con la resolución de ecuaciones cúbicas en el llamado caso irreducible. Fue en los trabajos de Cardano y Bombelli a mediados del siglo XVI. Hacia mediados del siglo XVIII, en la práctica matemática entraron diferentes aspectos de la comprensión del número complejo, tanto variable como constante. Podemos mencionar aquí los nombres de D'Alembert (1717-1783), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonard Euler (1707-1783) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Los mayores méritos en ello pertenecen a Euler.

No obstante, aún durante mucho tiempo, la naturaleza de los números complejos no fue comprendida y se consideraba sobrenatural. En el año 1702 Leibniz escribió que "los números imaginarios son un hermoso y maravilloso refugio del espíritu divino, casi como la dualidad entre la existencia y la no existencia".

El desarrollo riguroso tanto del análisis real como del análisis complejo tardó mucho más que la rápida exploración de sus métodos por sus fundadores. Las primeras exposiciones sistemáticas del análisis complejo cercanas a las modernas se encuentran en trabajos de Augustin-Louis Cauchy "Memoria sobre la teoría de las integrales definidas" y "Memoria sobre las integrales definidas tomadas entre límites imaginarios" del año 1825, así como en los trabajos de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) y de Karl Weierstrass (1815–1897).

Voy a dar dos ejemplos de las paradojas que impedían un desarrollo riguroso más rápido de la teoría. La primera concierne a las raíces y la segunda a los logaritmos.

Paradoja 1. Empezamos con la indudable igualdad

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1},$$

y tomamos las raices cuadradas:

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$

lo cual se traduce en la igualdad $\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$. Es decir, deducimos que

$$1 = -1.$$

Paradoja 2. Esta paradoja está relacionada con los intentos de Bernoulli y Leibniz de definir el logaritmo neperiano de un número complejo. Primero vamos a acordar que cualquier que sea la definición de $\log z$, se tiene que cumplir la igualdad $e^{\log z} = z$ (para todo z en el dominio de definición del logaritmo).

La igualdad $1^2 = (-1)^2$ implica que $\log 1^2 = \log(-1)^2$, es decir, deducimos que $2\log 1 = 2\log(-1)$, $\log 1 = \log(-1)$. La última igualdad ya nos da una contradicción, porque se obtiene $e^{\log 1} = e^{\log(-1)}$, es decir, $1 = -1$.

Estas contradicciones sólo desaparecen si admitimos que la raíz cuadrada y el logaritmo toman múltiples valores, lo que constituye un punto inicial de la teoría de funciones analíticas *multiformes*. Debido a las resticciones del tiempo, en este curso sólo tocaremos un poco esta teoría.

4. Propiedades elementales de números complejos

Haremos primero un breve repaso de la estructura de los números complejos.

Definición. Diremos que un número complejo es un par (a, b) de números reales.

Utilizaremos la notación $\mathbb{C}$ para el conjunto de números complejos.

Como vemos, el conjunto $\mathbb{C}$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, y la suma de números complejos efectivamente está definida como la suma de los correspondientes vectores:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

La diferencia entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ está en que en $\mathbb{C}$ se tiene una estructura adicional.

El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales se entiende como un subconjunto del conjunto de los números complejos; es decir, identificaremos un número real a con el par $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Definamos el producto de un número real λ por un número complejo (a, b); el resultado es el mismo que la multiplicación del escalar λ por el vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, es decir,

$$\lambda \cdot (a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda a, \lambda b) \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ (a, b) \in \mathbb{C}.$$

De hecho, el conjunto $\mathbb{C}$ tiene una estructura de cuerpo, así que hemos de definir un producto de dos números complejos cualesquiera.

Vemos que cualquier número complejo (a, b) se expresa como

$$(a, b) = (a, 0) + b \cdot (0, 1).$$

Introduciendo un símbolo especial i para el par $(0, 1)$, en vista de la identificación $(a, 0) \equiv a$ se tiene que

$$(a, b) = a + bi.$$

Esta notación para designar los números complejos se llama *binomial*, y es la más usual. La emplearemos desde ahora. Salvo los casos cuando se especifica lo contrario, usaremos la notación $a + bi$ sólo para a y b reales.

Ponemos por definición

$$i^2 = -1.$$

Esta fórmula y la ley distributiva ya determinan de una forma única el producto de dos números complejos cualesquiera:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad \big(= (ac - bd, ad + bc)\big).$$

Si $z = a + bi$, se dice que a es *la parte real* de z y b *la parte imaginaria* de z: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Los números complejos con parte real 0 se denominan *imaginarios puros.*

Proposición 4.1. *El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos con las operaciones de suma y producto así definidas tiene estructura de cuerpo.*

Recordemos que un conjunto tenga la estructura de cuerpo significa lo siguiente:

(1) Es un grupo conmutativo respecto de la suma;

(2) Este mismo conjunto sin el elemento 0 es un grupo conmutativo respecto del producto;

(3) Las operaciones de la suma y del producto se relacionan entre sí según la ley distributiva.

Otros ejemplos de cuerpos son el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales y el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales; mencionemos también los cuerpos de característica no nula, conocidos del curso de Álgebra.

Como $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$ y las operaciones aritméticas en $\mathbb{C}$ son extensiones de las mismas operaciones de $\mathbb{R}$, podemos afirmar también que $\mathbb{R}$ *es un subcuerpo de* $\mathbb{C}$ *y* $\mathbb{C}$ *es una extensión del cuerpo* $\mathbb{R}$.

Dejamos al lector la comprobación formal de las propiedades (1) - (3) de los números complejos, ya que es bastante rutinaria.

Es oportuno hacer también los siguientes comentarios. A todo número complejo $z = a + bi$ se le asocia su *número conjugado* $\bar{z} = a - bi$. El producto $z \cdot \bar{z}$ es siempre un número real no negativo:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2,$$

donde *el módulo* de un número $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se define como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nótese que $|z|$ es simplemente el módulo del correspondiente vector en el plano.

Según las propiedades de cuerpo, todo número complejo z no nulo ha de tener un único número inverso z^{-1} tal que $z \cdot z^{-1} = 1$. La operación de conjugación permite expresar z^{-1}. Efectivamente, como $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, se tiene que $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$, luego

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

El mismo procedimiento sirve para expresar la división de dos números complejos. Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $w \neq 0$, se tiene

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Geométricamente, se suele interpretar a los números complejos como el plano $\mathbb{R}^2$; el plano interpretado de esta forma se denomina *plano complejo*. En adelante llamaremos *eje real* al eje de abscisas (el eje horizontal) y *eje imaginario* al eje de ordenadas (eje vertical). La conjugación en esta interpretación se traduce en la simetría respecto del eje real; nótese que $\bar{\bar{z}} = z$.

La operación de conjugación tiene una importante propiedad más: conserva las operaciones aritméticas entre los números. Es decir,

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}},$$

etc. para todo par de números complejos z, w.

En coordenadas polares, todo número $z = x + iy \neq 0$ se caracteriza por el módulo $r = |z|$ y el *argumento* θ, que se definen mediante fórmulas

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Se escribe $\theta = \arg z$. Dados el módulo r y el argumento θ de un número complejo z, lo podemos expresar como

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Esta representación de un número complejo se llama *representación trigonométrica*.

Como es bien sabido, el argumento no está definido de manera única, ya que $\theta - 2\pi, \theta + 2\pi$, y en general $\theta + 2k\pi$, donde k es cualquier número entero, representan el mismo ángulo que θ. Muchas veces se elige un argumento con la propiedad adicional $\theta \in [0, 2\pi)$ ó bien $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Si γ_1 y γ_2 son curvas lisas en el plano complejo que comienzan en el mismo punto z_0, por *ángulo* entre estas curvas en z_0 entendemos el ángulo entre sus vectores tangentes.

La interpretación geométrica de los números complejos fue introducida por Karl Friedrich Gauss y resulta muy útil en la teoría. Se puede decir que con ella se ha superado la mística que caracterizaba las etapas iniciales de la teoría. Todas las operaciones aritméticas se interpretan en el plano complejo de forma muy natural. La suma, la diferencia y el producto con un número real se interpretan como correspondientes operaciones vectoriales. Si $z, w \in \mathbb{C}$, el módulo $|z - w|$ es igual a la distancia euclidea entre los puntos z y w. El conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

es el disco abierto de radio r centrado en el punto z_0.

La multiplicación y la división de números complejos se interpretan mejor en coordenadas polares: zw es el número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos de z y de w, y cuyo argumento es la suma de los argumentos de z y de w. Para dividir z por w, hay que dividir los módulos y restar los argumentos (estamos suponiendo que z y w no son nulos). Como consecuencia, vemos que

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \implies z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}(n\theta)\big)$$

(aquí n es un número entero). En particular, poniendo $r = 1$, obtenemos la *fórmula de De Moivre* $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$.

Se tienen las siguientes propiedades:

$$|z+w| \leqslant |z| + |w|, \quad |z| - |w| \leqslant |z-w|,$$
$$|\mathrm{Re}\ z| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im}\ z| \leqslant |z|, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad |z^n| = |z|^n \ \ (n \in \mathbb{Z}),$$
$$\mathrm{Re}\ z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}\ z = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Haremos también una lista de las propiedades básicas del argumento.

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w, \quad \arg\big(\frac{z}{w}\big) = \arg z - \arg w,$$
$$\arg(\frac{1}{z}) = \arg\bar{z} = -\arg z, \quad \arg(z^n) = n\arg z \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Dado que el argumento se define sólo módulo un sumando $2\pi k$, la forma de entender cada una de estas igualdades es la siguiente: para cualquier elección de los argumentos en la partes derecha, se obtiene *uno de los argumentos* de la expresión en las parte izquierda. Por ejemplo, para cualquier elección de $\arg z$ y $\arg w$, la suma de estos dos números da uno de los argumentos de zw.

Es muy importante entender muy bien la función "argumento" para evaluar bien las raíces. La falta de unicidad en esta definición hace que los números complejos tengan muchas raíces. Más precisamente, un número complejo no nulo z, para cualquier n natural, tiene exactamente n raíces n-ésimas.

Vamos a deducir la fórmula de las raíces. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ un número dado; queremos resolver la ecuación

$$w^n = z.$$

Sean

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad w = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

las representaciones trigonométricas de z y w, entonces nuestra ecuación equivale a dos relaciones

$$\rho^n = r; \qquad n\varphi = \theta \ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Para encontrar los posibles valores de w, hemos de encontrar los posibles valores de ρ y θ.

La primera relación se resuelve de una forma única: $|w| = \rho = \sqrt[n]{r}$. Fijemos uno de los argumentos θ de z. Entonces vemos que la segunda ecuación tiene soluciones

$$\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n};$$

se ve también que se obtienen valores diferentes de w, cogiendo $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Para los demás valores de k se obtienen los mismos valores de w. Por lo tanto, *la raíz $\sqrt[n]{z}$ tiene n valores diferentes, que tienen todos el mismo módulo y se dan por las fórmulas*

$$|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}, \qquad \arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Los valores de $\sqrt[n]{z}$ se ubican en vértices de un polígono regular de n lados, centrado en el origen e inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

5. Raíces cuadradas

La raíz cuadrada de un número complejo tiene también una expresión en forma binomial. Vamos a deducir esta forma.

Dado un número complejo $a + bi$, queremos encontrar $c + di \in \mathbb{C}$ tal que

$$(c + di)^2 = a + bi.$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones para c y d

$$c^2 - d^2 = a; \qquad 2cd = b. \tag{5.1}$$

Utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema (François Viète, 1540–1603). *1) Dada una ecuación cuadrática*

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

sus raices x_1, x_2 satisfacen las fórmulas

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \qquad x_1 x_2 = \frac{C}{A}. \tag{5.2}$$

2) Recíprocamente, si tenemos dos números x_1, x_2, que satisfacen (5.2), entonces son raices de la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$.

En el curso de bachillerato, se suele ver este teorema para el caso cuando A, B, C, x_1, x_2 son reales, y éste es el único caso que necesitamos ahora. El teorema de Viete es cierto también para el caso complejo.

Como consecuencia de (5.1), obtenemos las ecuaciones

$$c^2 + (-d^2) = a; \qquad c^2 \cdot (-d^2) = -\frac{b^2}{4}. \tag{5.3}$$

Debido al apartado 2) del teorema de Viete, vemos de (5.3) que los números c^2 y $-d^2$ son raices reales de la ecuación $x^2 - ax - \frac{b^2}{4} = 0$. Las raices de esta ecuación son

$$x_{1,2} = \frac{a \pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $c^2 \geqslant 0$, $-d^2 \leqslant 0$, obtenemos las fórmulas

$$c^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}, \qquad d^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}. \tag{5.4}$$

Suponiendo que $b \neq 0$, vemos que tenemos dos opciones para elegir el valor de c e, independientemente, dos opciones para el valor de d, lo que nos daría 4 posibilidades. En realidad, de estas 4 posibilidades sólo se quedan dos, debido a que la igualdad $2cd = b$ en el sistema (5.1) no se sigue de la igualdad $c^2 \cdot (-d^2) = -\frac{b^2}{4}$ en el sistema (5.3). Finalmente obtenemos la siguiente regla para calcular raices cuadradas.

Supongamos que $b \neq 0$. Entonces

$$\sqrt{a+bi} = \pm(c+di)$$

donde c, d son los números reales cualesquiera que cumplen (5.4) y "la ley de signos"

$$\operatorname{sign}(cd) = \operatorname{sign}(b).$$

Si $b = 0$, los dos valores de $\sqrt{a}$ se hallan sin dificultades.

Ejemplo. Calculemos los valores de $\sqrt{3-4i}$.
Solución: $a = 3$, $b = -4$, $c^2 = \frac{5+3}{2} = 4$, $d^2 = \frac{5-3}{2} = 1$. Según "la ley de los signos", $\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$. Comprobación: $(2-i)^2 = 2^2 - 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot i = 3 - 4i$.

6. Ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos

El mismo procedimiento por el que se resuelve la ecuación cuadrática con coeficientes reales (la compleción al cuadrado) sirve también para el caso de coeficientes complejos. Así se obtiene la misma fórmula:

Las soluciones de la ecuación $Az^2 + Bz + C = 0$ con coeficientes complejas son

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

Si $B^2 - 4AC = 0$, las dos raices coinciden. Si $B^2 - 4AC \neq 0$, obtenemos dos raices complejas diferentes. Por lo tanto, **en el plano complejo cualquier polinomio de orden 2 tiene exactamente dos raices**. Más adelante en este curso demostraremos el siguiente teorema.

Teorema (Teorema Fundamental del álgebra)**.** *En el plano complejo cualquier polinomio de orden n tiene exactamente n raíces (contadas de acuerdo con su multiplicidad).*

Ejemplo. Resolver la ecuación $z^2 - (5-3i)z + (2-6i) = 0$.
Solución: $D = B^2 - 4AC = 8 - 6i$; $z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{(5-3i)\pm(3-i)}{2}$; $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 4 - 2i$. Para comprobar el resultado, se puede usar el teorema de Viete (para el caso complejo).

7. La función exponencial y la función trigonométrica

La teoría sistemática de funciones analíticas se va a desarrollar más adelante, a lo largo de todo el curso. En este apartado vamos a adelantar algunos ejemplos importantes, que nos permitirán motivar mejor las construcciones posteriores.

Como hemos mencionado en la Introducción, una función analítica de la variable compleja z puede definirse por una serie de potencias de z. En general, decimos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, cuyos términos u_n son vectores de $\mathbb{R}^k$, *converge al vector* v, si la distancia en $\mathbb{R}^k$ en la norma euclídea entre las sumas parciales $\sum_{n=1}^{N} u_n$ de la serie y v tiende a 0 cuando N tiende a ∞. Como la desigualdad triangular se cumple también para vectores en $\mathbb{R}^k$, la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia también en este contexto de series vectoriales.

La convergencia de una serie con términos complejos se entiende como la convergencia en $\mathbb{R}^2$, lo que equivale simplemente a la convergencia por separado de las partes reales y de las partes imaginarias.

Definición. La función exponencial $\exp(z)$ de una variable compleja z se define por la serie

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Aplicando, por ejemplo, el criterio de D'Alembert de convergencia absoluta, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{|z|^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

para todo z, lo que implica que esta serie converge absolutamente para todo número z complejo. Como esta serie coincide con el desarrollo en la serie de Maclaurin de la función exponencial para valores reales de z, vemos que hemos definido una continuación de la función exponencial de la variable real.

Lema 7.1. *Para todos z y w complejos,*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\,\exp(w).$$

Demostración. Esta identidad se comprueba multiplicando las series y reagrupando términos semejantes:

$$\exp(z)\,\exp(w) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{m+n=k \\ m,n\geqslant 0}} \frac{z^m\, w^n}{m!\, n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{m+n=k \\ m,n\geqslant 0}} \frac{(m+n)!}{m!\, n!}\, z^m w^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(z+w)^k = \exp(z+w)$$

(hemos utilizado aquí el binomio de Newton para $(z+w)^k$). La reagrupación está justificada porque las series de $\exp(z)$ y $\exp(w)$ convergen absolutamente. □

La función exponencial del argumento puramente imaginario se expresa a través de funciones trigonométricas. Efectivamente, sustituyendo $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, y separando la parte real y la parte imaginaria, obtenemos

$$\exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n \text{ par}} \frac{(iy)^n}{n!} + \sum_{n \text{ impar}} \frac{(iy)^n}{n!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

De aquí se deduce las fórmula para $\exp z$ para cualquier $z = x + iy$ complejo:

$$e^{x+iy} = e^x\big(\cos y + i \operatorname{sen} y\big). \tag{7.1}$$

Ahora tenemos una nueva manera de escribir un número z en la forma trigonométrica:

$$z = |z| e^{i \arg z}.$$

El lema 7.1 explica también la regla geométrica de multiplicación de números complejos. Simplemente, dados unos números complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, se tiene que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Vemos de nuevo que al multiplicar dos números complejos, sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman.

Como una consecuencia fácil de (7.1), mencionaremos también la fórmula

$$\left|e^z\right| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Obtenemos también **las fórmulas de Euler**, que expresan las funciones $\cos y$, $\operatorname{sen} y$ de la variable real y a través de la función exponencial exp, evaluada en un número imaginario:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

De la misma forma que la función exponencial, las serie de Taylor de las funciones sen y cos permiten definirlas para cualquier número complejo.

Definición. El coseno y el seno de cualquier número complejo z vienen dados por las fórmulas

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \qquad \operatorname{sen} z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{7.2}$$

Ejercicios. 1) Encontrar las imágenes de las rectas $\{\operatorname{Re} z = \text{const}\}$, $\{\operatorname{Im} z = \text{const}\}$ por la función exponencial.
2) Demostrar que las fórmulas

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{7.3}$$

siguen siendo válidas para cualquier z complejo.
3) Demostrar la fórmula $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ para $z \neq 1$.
4) Si $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \neq 0$, entonces

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}\right),$$

y

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \cdots + \operatorname{sen} n\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.$$

<u>Sugerencia:</u> Usar 3) con $z = e^{i\theta}$.

8. Logaritmos de números complejos. Ramas del argumento y ramas del logaritmo.

Definición. Sean z, w números complejos. Se dice que w es *un valor del logaritmo* de z si

$$e^w = z. \tag{8.1}$$

Es fácil encontrar una fórmula para encontrar todos los logaritmos de z. Para ello, ponemos $w = u + iv$. Entonces $e^w = e^u e^{iv}$, y (8.1) se reduce al sistema de dos ecuaciones

$$e^u = |z|, \qquad v = \arg z \pmod{2\pi}.$$

Luego z no puede ser nulo y $u = \log|z|$. Obtenemos la fórmula

$$\log z = \log|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Por *una rama* de una función multiforme f definida sobre un subconjunto $\mathcal{D}$ del plano complejo, entendemos una función $\tilde{f}$, definida sobre un subconjunto $\widetilde{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$,

que es continua y tiene la siguiente propiedad: para todo $z \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $\tilde{f}(z)$ es uno de los valores de $f(z)$.

Vamos a ver cómo podemos definir las ramas del logaritmo y de la raíz n-ésima.

Sea τ un número real fijo. La función $w \mapsto \exp(w)$ es uno a uno sobre la banda horisontal

$$\Pi_\tau = \big\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \in (\tau, \tau + 2\pi)\big\}$$

y envía este conjunto sobre

$$F_\tau = \mathbb{C} \setminus \{z = re^{i\tau} : r \geqslant 0\}$$

(el plano complejo menos un rayo). La función inversa a $f|\Pi_\tau$ es es continua en F_τ. Está claro que $\big(\exp|\Pi_\tau\big)^{-1}(z)$ es uno de los valores de $\log(z)$. Es decir, poniendo

$$(\operatorname{Log} z)_\tau = \big(\exp|\Pi_\tau\big)^{-1}(z), \qquad z \in F_\tau$$

obtenemos una de las ramas del logaritmo, definida en el sector F_τ. Podemos definir también *la rama del argumento* $\arg_\tau$ según la siguiente regla: $\arg_\tau(z)$ está definido para todo $z \in F_\tau$ y es el valor del argumento $\arg z$ tal que

$$\tau < \arg_\tau(z) < \tau + 2\pi.$$

A veces se define también $\arg_\tau(z)$ para valores de z de forma $z = re^{i\tau}$, $r > 0$, poniendo $\arg_\tau(re^{i\tau}) = \tau$, $r > 0$. Con ello elegimos el único valor del argumento para todo $z \neq 0$, que satisface

$$\tau \leqslant \arg_\tau(z) < \tau + 2\pi.$$

Se ve fácilmente que la función $\arg_\tau$ no es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero es continua en F_τ. Se ve fácilmente que la función $\arg_\tau$ no es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero es continua en F_τ. Como $(\operatorname{Log} z)_\tau$ toma sus valores en Π_τ, se cumple la fórmula

$$(\operatorname{Log} z)_\tau = \log|z| + i \arg_\tau(z), \qquad z \in F_\tau. \tag{8.2}$$

La rama

$$\operatorname{Log} z = (\operatorname{Log} z)_{-\pi},$$

definida sobre $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}$, se llama *la rama principal de logaritmo*. Nótese que $\operatorname{Log} 1 = 0$.

Las reglas del manejo con los logaritmos complejos, por lo general, son "peores" que para logaritmos reales. Por ejemplo, $\exp\big((\operatorname{Log} z)_\tau\big) = z$ para todo $z \in F_\tau$ (por definición). Pero, por el contrario, la fórmula $(\operatorname{Log} \exp w)_\tau = w$ en general no se cumple, sólo se puede afirmar que

$$(\operatorname{Log} \exp w)_\tau = w + 2\pi i k, \qquad k = k(w) \in \mathbb{Z}.$$

De la misma forma, por ejemplo,

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i k,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ depende de z_1 y z_2 y, en general, no es nulo.

9. Ramas de raíces

Para todo $\tau \in \mathbb{R}$, la función

$$(\sqrt[n]{z})_\tau = \exp\left(\frac{(\operatorname{Log} z)_\tau}{n}\right)$$

es una rama continua de la raíz n-ésima, definida sobre el sector $\mathcal{F}_\tau$. Efectivamente,

$$\left(\exp\frac{(\operatorname{Log} z)_\tau}{n}\right)^n = \exp\big((\operatorname{Log} z)_\tau\big) = z.$$

Para $\tau = -\pi$, obtenemos lo que se llama *la rama principal de la raíz n-ésima.*

Referencias

[1] http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/map.html

[2] http://www.diam.unige.it/∼irro/profilo_e.html