Proyecto investigador

Modelos funcionales duales de operadores lineales

Dmitry V. Yakubovich

Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Madrid

Contenido

Capítulo 3. El modelo tipo Nagy y Foiaş en dominios en el plano complejo

Capítulo 4. Aplicaciones

Capítulo 5. Las líneas abiertas de investigación

0. Introducción

En esta memoria haremos una síntesis de los trabajos del autor, dedicados a la teoría espectral de operadores no autoadjuntos, y trazaremos algunas líneas que continúan a esta investigación.

El concepto del espectro $\sigma(A)$ de una matriz cuadrada A es uno de los conceptos más básicos y fructíferos del álgebra lineal. Este concepto está íntimamente relacionado con *la diagonalización* de la matriz. Si A es hermítica, entonces existe esencialmente una única transformación lineal que diagonaliza la matriz y conserva la norma euclídea. Lo mismo se cumple si tenemos una matriz normal.

Si A no es normal, pero es diagonalizable, existe la transformación que reduce A a la forma diagonal, pero, contrariamente al caso de la matriz normal, esta transformación ni conserva la norma euclídea de los vectores ni es única. Existen matrices no diagonalizables; no obstante, y como se sabe, *la forma de Jordan* proporciona una información completa sobre la estructura de la matriz. La transformación que reduce la matriz a su forma de Jordan tampoco es única.

La evolución de un sistema lineal finito dimensional se describe por una matriz, y ésta es una de las principales aplicaciones de la forma de Jordan. Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, la diagonalización de la matriz del sistema dinámico equivale a la descomposición de un movimiento arbitrario de este sistema en una suma de oscilaciones armónicas. Una gran cantidad de sistemas físicos se modelizan por sistemas lineales infinito dimensionales; éste es el planteamiento estándar de la física matemática. Por esta razón, es necesaria una teoría espectral de operadores lineales en dimensión infinita.

La situación actual de la teoría espectral en la dimensión infinita es la siguiente. Mientras que existe un análogo completo infinito dimensional de la teoría espectral de matrices hermíticas y normales, no existe una teoría espectral general de los operadores no autoadjuntos. No se conoce un sustituto de la forma de Jordan para el caso infinito dimensional que tenga la misma generalidad y utilidad.

Los problemas espectrales para un operador general infinito dimensional suelen ser muy difíciles. Por ejemplo, durante mucho tiempo estuvo abierta la pregunta si todo operador lineal A en un espacio de Banach L tiene un subespacio invariante no trivial (distinto de 0 y L). Actualmente se conocen ejemplos de operadores sin subespacios invariantes no triviales, ver [42, 97], pero se desconoce cuál es la respuesta a esta pregunta para operadores en espacios de Hilbert.

Hay muchas otras evidencias que demuestran que la estructura espectral de un operador lineal general puede ser muy complicada. Todo esto sugiere que la idea de descomponer un movimiento arbitrario en oscilaciones armónicas *independientes*, en general, no puede funcionar en el caso infinito dimensional. Sin embargo existen diferentes teorías espectrales parciales que se aplican a clases particulares de operadores lineales. La línea de investigación que vamos a describir pertenece a una de estas corrientes, más concretamente los llamados *modelos funcionales.*

En general, un modelo funcional de un operador es un operador en un determinado espacio de funciones, que es unitariamente equivalente (o semejante) al operador inicial y tiene una forma simple, que permite responder a preguntas sobre su estructura espectral. [1]

Entre las cuestiones que se estudian habitualmente se encuentran las siguientes:

1) Definir las funciones del operador para una clase de funciones más amplia posible.

2) Estudiar los vectores propios y su completitud.

3) Averiguar si los vectores propios forman una base de Riesz.

4) Describir el conmutante del operador (por definición, es el conjunto de operadores que conmutan con este operador).

5) Describir los subespacios invariantes.

Otro propósito de la teoría espectral es la clasificación de operadores de una determinada clase respecto a la relación de equivalencia unitaria o a la similitud.

La idea principal del método de modelos funcionales es que, una vez construido un modelo funcional de un operador, todas estas preguntas se reducen a unas preguntas analíticas sobre el espacio de funciones en el que actúa el operador modelo.

La teoría espectral de operadores no autoadjuntos y, en particular, el método de modelos funcionales utilizan un gran abanico de técnicas, donde se combinan diversos temas del análisis funcional, la variable real y la variable

[1] Decimos que operadores A_1, A_2 en unos espacios de Banach H_1, H_2, respectivamente, son *semejantes* si existe un isomorfismo lineal $U : H_1 \to H_2$ tal que $A_2 = UA_1U^{-1}$.

compleja de una forma fascinante.

Utilizaremos básicamente tres tipos de operadores como modelos funcionales, que son los siguientes:

1) *El operador diagonal* de multiplicación por la variable independiente en un espacio funcional X, definido como

$$M_z : f = f(z) \mapsto zf(z), \qquad f \in X.$$

2) *El cociente de dos operadores diagonales.* Sea X_1 un espacio funcional de Hilbert y X_2 su subespacio. Supongamos que el operador diagonal M_z $f = f(z) \mapsto zf(z)$ actúa sobre X_1 y está acotado en este espacio. Sea X_2 un subespacio de X_1, invariante por M_z. Entonces podemos considerar el espacio cociente $X_1/X_2 \cong X_1 \ominus X_2$, que es un espacio de Hilbert. Definimos *el cociente* $\widehat{M_z}$ *del operador* M_z *con respecto a su subespacio invariante* X_2 como la aplicación

$$\widehat{M_z} : X_1/X_2 \to X_1/X_2, \qquad \widehat{M_z}\,[f] = [zf], \quad f \in X_1.$$

Hemos denotado por $[f]$ la coclase $f + X_2$ de una función $f \in X_1$.

3) *El operador diagonal truncado.* Supongamos que tenemos un espacio X de funciones sobre un subconjunto $\mathcal{G}$ de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\infty \in \mathcal{G}$. Las funciones en X toman valores escalares o vectoriales.

El operador diagonal truncado tiene la forma

$$M_z^T f(z) = zf(z) - \big(zf(z)\big|_{z=\infty}\big) \otimes \mathbf{1}, \tag{0.1}$$

donde $f_0 \otimes \mathbf{1}$ es la función sobre $\mathcal{G}$, que es idénticamente igual a f_0. En muchos casos, el operador M_z^T está bien definido y actúa sobre X.

La ventaja que tienen los modelos funcionales diagonales está clara. Por ejemplo, si el modelo de A es el operador diagonal M_z en un espacio $\mathcal{X}$ de funciones sobre $\mathcal{G}$ y tenemos una función $\varphi : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$, entonces para definir el operador $\varphi(A) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ basta considerar el operador

$$f \mapsto \varphi f, \qquad f \in \mathcal{X}.$$

Esta definición es correcta si y sólo si φ es un multiplicador de $\mathcal{X}$, es decir, si la multiplicación por φ lleva $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ y es una operación acotada.

En el Capítulo 1 hacemos una descripción de modelos funcionales, conocidos previamente. Entre ellos se encuentra la representación espectral de operadores normales en la forma de von Neumann, que, como veremos, es un modelo funcional diagonal de estos operadores en espacios L^2 con valores vectoriales. Este modelo se utilizará en nuestra exposición.

El modelo más celebre de operadores no autoadjuntos es el modelo de Nagy–Foiaş, que discutiremos en la Sección 1.2. Como veremos, este modelo tiene la forma del operador diagonal cociente. Cientos de trabajos están dedicados a este modelo y a sus aplicaciones. En este capítulo hablaremos también, brevemente, sobre los modelos de de Branges–Rovnyak, Pavlov, Naboko, Helton, Martin–Putinar y otros.

El autor ha construido modelos para tres amplias clases de operadores, cuyo comportamiento espectral es muy distinto. Estas clases son:

A. Operadores cuyos autovectores poseen una estructura especial analítica. Aquí se incluyen los operadores de Toeplitz, operadores hiponormales y subnormales.

B. Perturbaciones de operadores normales cuya medida espectral escalar es la medida de Lebesgue dos-dimensional.

C. Operadores de cierto tipo, para los que construimos un modelo diagonal cociente. Esta construcción se aplica tanto a operadores acotados como a no acotados. El modelo que proponemos para esta clase tiene muchas características en común con el modelo de Nagy y Foiaş, pero tiene también importantes diferencias. El modelo original de Nagy y Foiaş sólo se construye en un disco o un semiplano. Nuestro modelo se asocia a un dominio bastante arbitrario en el plano complejo (acotado o no acotado). Es un modelo con respecto a la semejanza y no con respecto a la equivalencia unitaria. Se amplía de forma importante la clase de operadores a los que podemos aplicar las técnicas de la teoría de Nagy y Foiaş.

Los modelos construidos por el autor tienen varias características comunes, que destacaremos en esta exposición. Son modelos semejantes al operador inicial. Los modelos construidos anteriormente por otros autores, por lo general, solamente respetan la estructura unitaria.

Otros rasgos muy importantes de nuestro esquema son las siguientes:

1) La construcción simultánea del modelo del operador y de su conjugado.

2) La dualidad entre estos dos modelos.

Debido a estas características, llamamos a nuestros modelos *modelos duales funcionales*.

En la Sección 2.3, hablaremos con detalle sobre esta dualidad. Veremos que, además de ser una propiedad matemáticamente atractiva, la dualidad entre el modelo del operador y de su conjugado juega un papel esencial en la obtención de los resultados principales.

A diferencia con los modelos funcionales anteriores, los modelos que proponemos no se determinan de forma única. Para construir un modelo semejante de un operador lineal A hace falta incluirlo en un sistema (A, B, C) de tres operadores. Podremos ver que el lenguaje que utilizamos en este tipo de teoría espectral tiene muchos puntos en común con los planteamientos clásicos de la teoría clásica de Control Lineal, lo que hace muy atractivo intentar aplicar modelos duales funcionales al Control Lineal.

En el Capítulo 4 discutiremos aplicaciones, entre las que destaca la aplicación al estudio de los llamados dominios de cuadraturas (y las correspondientes curvas algebráicas) y las aplicaciones a la teoría de control lineal de sistemas infinito dimensionales.

En el último capítulo de la memoria esbozaremos posibles líneas de futura investigación, tanto en la teoría espectral como en las aplicaciones.

A lo largo de este texto sólo consideramos espacios de Hilbert complejos separables (sin descartar que tengan la dimensión finita). Por un operador lineal en un espacio de Banach entenderemos un operador acotado, salvo que se diga lo contrario. Para un espacio de Banach K, denotamos por $\mathcal{B}(K)$ el espacio de operadores acotados en K.

1. Antecedentes: modelos funcionales conocidos previamente y otros acercamientos a la Teoría espectral

1.1. Teoría espectral de operadores autoadjuntos en forma del modelo funcional de John von Neumann

La teoría espectral de operadores autoadjuntos está en la base de la matemática moderna, lo que se comprueba con su estricta relacion con el método de Fourier de la física matematica. Los fundamentos de esta teoría fueron puestos en la primera mitad del siglo XX por los matemáticos tan famosos como I. Fredholm, F. Riesz, S. Banach, D. Hilbert. En los trabajos de John von Neumann y Hermann Weyl (ver [82]) se revelaron relaciones muy fuertes con la física cuántica.

Existen distintas formas del Teorema Espectral para operadores normales en un espacio de Hilbert. Presentamos aquí *la representación espectral en forma de la integral directa*, que fue construida en el artículo [81] de John von Neumann. De hecho, esta es la forma más fuerte del Teorema Espectral y las demás formas se obtienen fácilmente a partir de ella. Cabe observar que la integral directa se utiliza también en la teoría de los álgebras de von Neumann, cuyo estudio se inició en el mismo artículo.

Sea H un espacio de Hilbert, A un operador lineal en H y E un subespacio de H. Se dice que E es *un subespacio cíclico de* A si los vectores $A^n e$, $n \geq 0$, $e \in E$, son completos en H. *La multiplicidad espectral de* A se define como

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min \big\{ \dim E : \quad E \text{ es un subespacio cíclico de } A \big\}. \tag{1.2}$$

Se dice que el operador A es *cíclico* si $\nu(A) = 1$, es decir, si A tiene un subespacio cíclico de dimensión 1.

Para enunciar el teorema sobre la representación espectral de un operador normal cíclico no hace falta introducir la integral directa.

Teorema 1.1 (El Teorema Espectral, caso cíclico)**.** *Sea H una espacio de Hilbert complejo de dimensión finita o separable. Sea A un operador normal acotado cíclico en H. Entonces existe una medida positiva μ en $\mathbb{C}$, cuyo soporte* $\operatorname{supp}\mu$ *es compacto, y un isomorfismo isométrico*

$$U : H \to L^2(\mu)$$

tal que

$$UAU^{-1}f(z) = zf(z), \qquad \forall f \in L^2(\mu).$$

Se puede decir que el operador diagonal

$$M_z : f = f(z) \mapsto zf(z), \qquad f \in L^2(\mu) \tag{1.3}$$

es un *modelo funcional* del operador A. El operador A es unitariamente equivalente a su modelo. Este modelo es una obvia generalización de la diagonalización de una matriz normal. Efectivamente, si el soporte de μ es un conjunto finito de puntos $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, entonces una función $f \in L^2(\mu)$ queda determinada por sus valores $f_j \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda_j)$, y el operador (1.3) se reduce al operador

$$\{f_j\}_{1 \le j \le N} \mapsto \{\lambda_j f_j\}_{1 \le j \le N}.$$

El enunciado general del Teorema Espectral utiliza la llamada *integral directa*. Supongamos que K es un espacio de Hilbert, y μ es una medida en $\mathbb{C}$ con soporte compacto. Sea $L^2(\mu, K)$ el espacio de Lebesgue de funciones $f : \mathbb{C} \to K$ con

$$\|f\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int \|f(z)\|_K^2 \, d\mu.$$

Si $\{K(z)\}$ es una familia medible de subespacios de K, entonces *la integral directa*

$$\int^{\oplus} K(z) \, d\mu(z)$$

se define como el subespacio de $L^2(\mu, K)$, que es el conjunto de funciones $f(z) \in L^2(\mu, K)$ tales que $f(z) \in K(z)$ para μ-casi todo $z \in \mathbb{C}$. Si $K(z) = K$ para todo z, $\int^{\oplus} K(z) \, d\mu(z)$ coincide con $L^2(\mu, K)$.

Teorema 1.2 (El Teorema espectral, el caso general)**.** *Sea H una espacio de Hilbert complejo finito dimensional o separable. Sea A un operador normal acotado en H. Entonces existen una medida positiva μ en $\mathbb{C}$, cuyo soporte* $\operatorname{supp} \mu$ *es compacto, un espacio de Hilbert auxiliar K, una familia medible $\{K(z)\}$ de subespacios de K y un isomorfismo isométrico*

$$U : H \to \int^{\oplus} K(z) \, d\mu(z)$$

tal que

$$UAU^{-1}f(z) = zf(z), \qquad \forall f \in \int^{\oplus} K(z) \, d\mu(z). \tag{1.4}$$

De esta forma, el operador diagonal

$$M_z : \int^{\oplus} K(z)\, d\mu(z) \to \int^{\oplus} K(z)\, d\mu(z)$$

sirve como un modelo funcional de un operador normal arbitrario.

El Teorema Espectral para operadores autoadjuntos y normales permite dar respuestas completas a todas las preguntas 1)–5) que hemos mencionado en la Introducción. [2] Por ejemplo, dos operadores normales A_1 y A_2 son unitariamente equivalentes si y sólo si los parámetros de sus modelos funcionales satisfacen lo siguiente: las medidas μ_1 y μ_2 son mútuamente absolutamente continuas, y $\dim K_1(z) = \dim K_2(z)$ para μ_1-casi todo z.

Este teorema juega un papel crucial en el método de Fourier, la mecánica cuántica, la teoría de procesos estocásticos, la teoría de control y otros áreas.

1.2. El modelo de Szökefalvi–Nagy y Foiaş

El precio que se paga por la reducción de un operador a una forma diagonal es que se suele obtener espacios de funciones complicados. Muchas veces en la definición de este espacio se utilizan espacios de Hilbert de funciones analíticas. No obstante, como veremos, la facilidad de obtener respuestas a preguntas de carácter espectral es mucho mayor en el marco de modelos funcionales que usando otras herramientas.

El más célebre modelo funcional de operadores no autoadjuntos[3] es el modelo de Nagy–Foiaş de contracciones en un espacio de Hilbert. Este modelo fue introducido en una serie de trabajos de estos autores en los años 60 y luego resumido en el famoso libro [104].

Sea T una contracción en un espacio de Hilbert H, es decir, un operador lineal cuya norma es menor o igual que 1. Decimos que T es *completamente no unitario* si no existe una descomposición $H = H_1 \oplus H_2$ en una suma ortogonal de espacios no nulos tal que $TH_j \subset H_j$ y $T|H_1$ es unitario. Cualquier contracción T se decompone en una suma ortogonal $T = T_1 \oplus T_2$, donde T_1 es unitario y T_2 es completamente no unitario. Como la representación espectral de operadores unitarios ya se conoce (son un caso particular de

[2]Con excepto de la descripción de subespacios invariantes, que se conoce sólo en casos de geometría simple del espectro de A.

[3]Tradicionalmente, se habla de la teoría espectral de operadores no autoadjuntos cuando se investigan operadores distintos de normales

operadores normales), la teoría de Nagy y Foiaş se ocupa sólo del caso de una contracción T completamente no unitaria.

Sean U, Y dos espacios de Hilbert. Denotamos por $\mathcal{B}(Y,U)$ el espacio de operadores que van de Y a U, y por $H^\infty(\mathcal{B}(Y,U))$ el espacio de funciones analíticas acotadas en el disco unidad $\mathbb{D}$ que toman valores en $\mathcal{B}(Y,U)$. Toda función en $H^\infty(\mathcal{B}(Y,U))$ tiene valores frontera en casi todo punto de la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ (en el sentido de la convergencia fuerte de operadores).

Necesitaremos también espacios de Hardy H^2 con valores vectoriales. Los elementos del*espacio de Hardy* $H^2(U)$ con valores en un espacio de Hilbert U son funciones analíticas que van del disco unidad a U. Una función

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D},$$

donde $c_n \in U$, pertenece a $H^2(U)$ si y sólo si

$$\|f\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty \|c_n\|^2 < \infty.$$

Es estándar representar $H^2(U)$ como un subespacio de $L^2(\mathbb{T},U)$, donde $\mathbb{T}$ es la circunferencia unidad. Por lo tanto, $H^2(U)$ es un espacio de Hilbert. Escribiremos simplemente H^2 en el caso cuando $U = \mathbb{C}^1$. Las propiedades básicas de espacios H^p se exponen, por ejemplo, en [40].

Sea $\Theta \in H^\infty(\mathcal{B}(Y,U))$ una función contractiva, lo que significa que

$$\|\Theta\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|\Theta(z)\| \le 1.$$

Supongamos además que Θ es *pura*, es decir, $\|\Theta(0)y\| < \|y\|$ para todo vector $y \in Y$ no nulo. A toda función de este tipo se le asocia un *espacio modelo de Nagy—Foiaş*, que es el espacio cociente de dos espacios de funciones, construido de la siguiente manera.

Ponemos $\Delta(e^{i\varphi}) = \big(I - \Theta(e^{i\varphi})^*\Theta(e^{i\varphi})\big)^{1/2}$, $\varphi \in [0,\, 2\pi]$. Consideremos los espacios

$$X_\Theta^0 = \begin{pmatrix} L^2(\mathbb{T},U) \\ \operatorname{clos} \Delta L^2(\mathbb{T},Y) \end{pmatrix}, \quad X_\Theta^1 = \begin{pmatrix} H^2(U) \\ \operatorname{clos} \Delta L^2(\mathbb{T},Y) \end{pmatrix}, \quad X_\Theta^2 = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix} H^2(Y).$$

Aquí X_Θ^0 es la suma directa de $L^2(\mathbb{T},U)$ y la clausura de $\Delta L^2(\mathbb{T},Y)$ en $L^2(\mathbb{T},Y)$, y X_Θ^1, X_Θ^2 son sus subespacios:

$$X_\Theta^0 \supset X_\Theta^1 \supset X_\Theta^2.$$

El operador $f \mapsto zf$ de multiplicación por la variable independiente en X^0_Θ es unitario, y X^1_Θ, X^2_Θ son subespacios invariantes por este operador.

Definiciones. *El espacio modelo* es el espacio cociente

$$X^1_\Theta / X^2_\Theta. \tag{1.5}$$

El operador modelo M_Θ de Nagy–Foais, asociado a la función Θ, y que actúa en el espacio modelo, se define como el cociente del operador

$$f \mapsto zf, \qquad f \in X^1_\Theta$$

respecto a su subespacio invariante X^2_Θ.

En otras palabras, denotando por $[f]$ la coclase $f + X^2_\Theta$ de una función $f \in X^1_\Theta$, vemos que el operador modelo

$$M_\Theta : X^1_\Theta / X^2_\Theta \to X^1_\Theta / X^2_\Theta \tag{1.6}$$

actúa de la siguiente forma:

$$M_\Theta\,[f] = [zf], \qquad f \in X^1_\Theta. \tag{1.7}$$

Por otro lado, dada una contracción $T : H \to H$ completamente no unitaria, se definen espacios

$$Y = \operatorname{clos} D_T H, \qquad U = \operatorname{clos} D_{T^*} H,$$

donde $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$, $D_{T^*} = (I - TT^*)^{1/2}$. La función

$$\Theta_T(z) = -T + zD_{T^*}(T - zT^*)^{-1} D_T \big| Y,$$

se llama *la función característica de* T. Puede comprobarse que Θ_T es una función contractiva de clase $H^\infty(\mathcal{B}(Y, U))$ que, además, siempre es pura.

A las funciones $\Theta_j \in H^\infty(\mathcal{B}(Y_j, U_j))$, $j = 1, 2$, se les llama *equivalentes* si

$$\Theta_2(z) \equiv u\,\Theta_1(z)\,v, \qquad z \in \mathbb{D},$$

donde $v : Y_2 \to Y_1$ y $u : U_1 \to U_2$ son isomorfismos isométricos.

Se puede enunciar el resultado principal de la teoría de Nagy y Foiaş de la siguiente forma:

Teorema A ([104])**.** 1) Para cualquier contracción T completamente no unitaria, el operador modelo M_{Θ_T}, construido a partir de la función característica de T, es unitariamente equivalente a T.

2) Para cualquier función pura $\Theta \in H^\infty(\mathcal{B}(Y, U))$ de norma menor o igual que 1, el operador modelo M_Θ es una contracción completamente no unitaria, y su función característica es equivalente a Θ.

Este teorema reduce el estudio de contracciones al estudio de sus modelos, es decir, a cuestiones sobre los espacios H^∞ y H^2 con valores vectoriales.

Como se ve, la forma del modelo es bastante más complicada que en la Teoría Espectral clásica de operadores normales. Sin embargo, la teoría de Nagy–Foiaş permite dar un estudio muy detallado de contracciones, sobre todo en el caso en el que los operadores D_T y D_{T^*} son "pequeños" en algún sentido, por ejemplo, cuando tienen rango finito. En este último caso los espacios Y y U son finito dimensionales, y Θ_T es una función matricial. Los operadores D_T y D_{T^*} se llaman *operadores defecto* de T. En el caso límite, si T fuese unitario, tendríamos $D_T = D_{T^*} = 0$ (en realidad, este caso quedó excluído de la consideración, porque estamos suponiendo que T es completamente no unitario).

Mencionaremos también que el modelo de Nagy–Foiaş se simplifica de forma considerable si la función característica Θ es *interna*, es decir, $\Theta^*\Theta = I$ en casi todo punto de la circunferencia unidad. Entonces el espacio cociente (1.5) se convierte en

$$H^2(U)\big/\Theta H^2(Y), \tag{1.8}$$

de tal forma que el operador modelo Nagy–Foiaş es el operador diagonal cociente en este espacio.

Cabe observar que, mientras que los operadores de multiplicación por la variable independiente no permiten modelar matrices que no son diagonalizables, la modelación mediante cocientes de operadores diagonales sí lo permite. Por ejemplo, el bloque de Jordan

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se modela por el operador

$$[f] \mapsto [zf] \quad \text{en } H^2/z^2H^2. \tag{1.9}$$

De hecho, la matriz T es una contracción completamente no unitaria, su función característica es $\Theta_T(z) = z^2$, y el operador (1.9) es el modelo de

Nagy–Foiaş de T. De la misma forma, el operador cociente $[f] \mapsto [zf]$ en el espacio H^2/z^nH^2 es el modelo Nagy–Foiaş del bloque estándar de Jordan de orden n. Si la función analítica $\Theta(z)$ no es racional, el operador modelo M_Θ es infinito dimensional.

Daremos a continuación una lista de algunos de los resultados más destacados que se obtienen en la teoría de Nagy y Foiaş a través del modelo.

1) Se define $\varphi(T)$ para cualquier función (escalar) $\varphi \in H^\infty$;

2) Para el caso de contracciones T tales que $\varphi(T) = 0$ para alguna función $\varphi \in H^\infty$ no nula, se halla un criterio de completitud de autovalores. En particular, este criterio se aplica a todos los casos cuando los defectos son finitos y el espectro de T no es todo el disco $\operatorname{clos}\mathbb{D}$. Para esta clase de operadores, se define una función minimal de T (que es una función de clase H^∞). Esta función es análoga al polinomio mínimo del Álgebra lineal.

3) Para el caso de defectos finitos, existe el criterio simple de que los vectores propios de T formen una base de Riesz en términos de la función característica Θ_T y la geometría del conjunto de sus ceros.

4) Se ha encontrado una estricta relación entre los subespacios invariantes de T y factorizaciones de Θ_T de una determinada clase.

5) Existe una descripción completa de los operadores que conmutan con T en términos del modelo. Esta caracterización se ha utilizado en la teoría de control H^∞ [44].

6) La teoría de Nagy y Foiaş encuentra una directa aplicación en la teoría de scattering de ondas, ver Lax–Phillips [63].

Es importante mencionar que existe una variante del modelo de Nagy y Foiaş para operadores disipativos. Para este caso, el papel del disco unidad lo juega el semiplano superior.

La teoría de Nagy y Foiaş se expone muchas veces a través de la noción de *la dilatación* de un operador. Supongamos que U es un operador unitario en un espacio de Hilbert K, y hemos encontrado una descomposición $K = H_- \oplus H \oplus H_+$ tal que U tiene una forma triangular con respecto a esta descomposición:

$$U \sim \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & T & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Entonces el operador T, que está en el bloque central de esta matriz 3×3, se llama *una compresión* de U, y el operador unitario U se llama *una dilatación* *unitaria* de T. Está claro que $\|T\| \leq 1$, porque $T = P_H U|H$. Además, se tiene que

$$T^n = P_H U^n | H$$

para todo $n \geq 0$, lo que implica que $p(T) = P_H p(U)|H$ para todo polinomio p.

Es fácil pasar del modelo funcional (1.6)–(1.7) a la dilatación unitaria (1.10) del operator $T \sim M_\Theta$, hay que poner simplemente:

$$K = X_\Theta^0, \quad H_- = X_\Theta^0 \ominus X_\Theta^1, \quad H_0 = X_\Theta^1 \ominus X_\Theta^2, \quad H_+ = X_\Theta^2.$$

Es decir, el operador M_z en el espacio X_Θ^0 es la dilatación unitaria del operator modelo M_Θ.

Las aplicaciones concretas del modelo de Nagy–Foias incluyen el análisis de los operadores de Schrödinger con el potencial complejo [90], operadores de Dirac [8], del modelo lineal de transporte de neutronas en un reactor atómico [79, 80] y otros. El modelo de Nagy y Foias tiene una directa relación con los llamados *sistemas abiertos*, que fueron estudiados por M. S. Livsic en el libro [66], en particular, en relación con las redes eléctricas. Se puede decir que este modelo es relevante en cualquier proceso físico que se describe con ecuaciones lineales y supone una disipación de la energía.

1.3. Otros modelos funcionales

El modelo de Nagy y Foiaş tiene varias modificaciones, diseñadas para operadores de diferentes clases. Entre estas variantes, podemos mencionar el modelo de de Branges–Rovnyak [18] y el modelo simétrico de Pavlov [89, 90]. En el trabajo de Nikolski y Vasyunin [85] se introduce una versión abstracta de estos modelos. Eligiendo unos parámetros, se puede convertir este modelo en cualquiera de las modificaciones concretas que se conocen.

Podemos mencionar aquí las ρ-contracciones, que ya fueron investigadas en el libro original de Nagy y Foiaş [104]. Se trata de una clase más amplia que las contracciones. Como se demuestra en [104], cualquier ρ-contracción es semejante a una contracción.

En los trabajos de Ch. Davis [34], McEnnis [77] y S. Naboko (ver [78]) se han construido modelos funcionales de las llamadas no contracciones y operadores no disipativos. Mientras que McEnnis utilizaba los espacios de Krein (con la métrica indefinida), S. Naboko demostró cómo construir un modelo de un operador no disipativo a partir del modelo de un operador disipativo auxiliar. En los trabajos posteriores de S. Naboko, V. Veselov, V. Ryzhov, V. Vasyunin, N. Makarov, A. Tikhonov y otros, este modelo fue aplicado al estudio de los operadores de ondas, de las componentes espectrales y de la estabilidad del espectro continuo y al estudio de otras cuestiones espectrales. Un acercamiento distinto a operadores casi unitarios fue desarrollado por V. Kapustin (ver [59]). El modelo de Kapustin relaciona el estudio de esta clase de operadores con los llamados subespacios casi invariantes del operador shift, ver [52] y [Y6].

La dilatación normal en la frontera del rango numérico de cualquier operador acotado fue construida recientemente por Putinar y Sundberg [95].

Podemos mencionar que recientemente ha surgido mucho interés en las construcciones del libro [17] de de Branges (ver, por ejemplo, Remling [99] y Makarov y Poltoratski [71]).

Últimamente se han producido avances muy grandes también en la teoría de operadores, relacionada con funciones de varias variables complejas. Mencionaremos los trabajos de Arveson (ver [14]), de Ambrozie, Engliš y Müller (ver [11]) y otros.

Teoría abstracta de modelos

En los trabajos de Agler, Arveson, Dritschel, McCullough y otros (ver [1], [14], [35]) se desarrolla la llamada *teoría abstracta de modelos*.

Por una familia de operadores en esta teoría se entiende una colección de operadores, actuando sobre espacios de Hilbert, que está cerrada respecto de ciertas operaciones (la suma directa, la restricción a un subespacio invariante y otras). La idea de esta teoría es asociarle a cada familia de operadores de este tipo su subclase, que se llama modelo de esta familia, y cuyas propiedades espectrales sean más fáciles de entender. Se demuestra que toda familia de operadores tiene un modelo mínimo respecto de inclusiones. Por ejemplo, los operadores unitarios son el modelo mínimo de la familia de todas las contracciones.

La noción de dilatación juega un papel importante en esta teoría.

La relación de esta teoría con la que desarrollamos nosotros no está clara de momento. Cabe notar, sin embargo, que la teoría de modelos respeta sólo la equivalencia unitaria, mientras que los modelos duales funcionales son semejantes y no unitariamente equivalentes al operador inicial.

1.4. Otros acercamientos a la Teoría espectral de operadores no autoadjuntos

Operadores espectrales y espectrales generalizados. La Teoría Espectral de operadores normales fue generalizada por Dunford y Schwartz a los llamados *operadores escalares*, que tienen una representación

$$A = \int z \, dE(z) + N,$$

donde $E(\cdot)$ es una medida espectral, cuyos valores son proyecciones no necesariamente ortogonales, y N es un operador casi nilpontente que conmuta con la proyección $E(\delta)$ para todo subconjunto Boreliano δ en el plano complejo. Esta teoría se expone en el tomo 3 del tratado de Dunford y Schwartz (ver [38]). Se demuestra que si el espectro de un operador está contenido en una unión disjunta de curvas de Jordan y se cumplen unas estimaciones de su resolvente, entonces es espectral. De forma paralela, Colojoara y Foiaş desarrollan en el libro [30] la teoría de operadores $\mathcal{A}$-espectrales, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones, definidas en un conjunto que contiene al espectro de A.

A pesar del éxito de estas teorías, su aplicación práctica no es tan grande como se esperaba. Por ejemplo, el operador diferencial

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad y(0) = 0, x \in [0, +\infty)$$

con el potencial q complejo finito no siempre es espectral en el sentido de Dunford o espectral generalizado en el sentido de Colojoara – Foiaş. Le impide ser espectral la presencia de las llamadas singularidades espectrales.

Teoría local espectral. La teoría local espectral estudia propiedades generales de operadores con respecto a la descomposición del espectro.

Los operadores *descomponibles* forman una clase más amplia. Un operador A en un espacio de Banach H se llama descomponible si para todo recubrimiento abierto, $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, de su espectro existen subespacios invariantes $H_1, \dots H_n$ de A tales que $H = H_1 + \cdots + H_n$, $\sigma(A|H_k) \subset \Omega_k$, $k = 1, \dots, n$. Todo operador espectral o espectral generalizado es descomponible.

Como se demuestra en el artículo de Ljubich y Macaev [64], si un operador T tiene el espectro real y satisface la condición

$$\int_0^{\varepsilon} \log\log \sup_{|\operatorname{Im} z| > t} \|(zI - T)^{-1}\| \, dt < \infty,$$

entonces es descomponible. Cualquier operador descomponible, cuyo espectro no es un punto, tiene subespacios invariantes no triviales.

Otra propiedad ámpliamente estudiada, y que fue intoducida por Bishop en 1959, es la llamada *propiedad* (β) *de Bishop*. Se dice que un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ tiene esta propiedad si para toda sucesión de funciones analíticas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, que van de un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ a H, la convergencia uniforme sobre los compactos de la sucesión de funciones $\{(zI - T)f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ implica la convergencia uniforme sobre los compactos de funciones $f_n(z)$.

Se introduce también otra propiedad de descomposición (δ) (que se contiene de forma implícita en el mismo artículo de Bishop). Como se demostró en [6], un operador es descomponible si y sólo si él satisface las propiedades (β) y (δ).

En el artículo de Albrecht y Eshchmeier [5] se demuestra que las propiedades (β) y (δ) son duales una de la otra: A satisface (β) si y sólo si A^* satisface (δ). En este mismo artículo, se da una caracterización muy importante: un operador tiene propiedad (β) si y sólo si este operador es semejante a la restricción de un operador descomponible a su subespacio invariante. El trabajo anterior [43] de Eschmeier y Putinar contiene otros resultados de este tipo. El reciente libro [62] es una excelente exposición sistemática de estas cuestiones.

La existencia de subespacios invariantes

Como ya hemos dicho en la introducción, la clasificación de los subespacios invariantes por un operador es uno de los primeros objetivos de su estudio espectral. A nivel abstracto, resultó extremadamente difícil responder incluso a la siguiente pregunta:

> **El problema de subespacios invariantes.** ¿Es cierto que cualquier operador en un espacio de Banach H tiene un subespacio invariante no trivial (es decir, distinto de 0 y H)?

Esta pregunta ya aparece de forma explícita en la colección de problemas de Halmos [49] y determinó muchos estudios en la Teoría espectral de operadores no autoadjuntos. Ahora, y después de muchos esfuerzos, se sabe que la respuesta para un espacio de Banach general es negativa, gracias al ejemplo de Enflo [42]. Este ejemplo fue elaborado en 1976, pero fue muy complicado, y tardó en publicarse 10 años. En este tiempo B. Beauzamy publicó en [20] una simplificación de los razonamientos de Enflo. Utilizando las ideas de Enflo, C. Read elaboró otro ejemplo todavía más simple de un operador en un espacio de Banach que no tiene subespacios invariantes no triviales, que fue publicado en [97]. Posteriormente Read encontró un operador casi nilpotente con esta misma propiedad, ver [98]. Se puede leer en [122] una exposición más detallada sobre la historia del hallazgo de estos ejemplos.

Hasta el momento se desconoce cuál es la respuesta al Problema de subespacios invariantes para un operador en un espacio de Hilbert; más aún, todos los operadores sin subespacios invariantes no triviales que se conocen actúan en espacios de Banach no reflexivos.

Por otro lado, existe un gran número de resultados asegurando la existencia de subespacios invariantes no triviales para operadores que pertenecen a unas clases especiales. La existencia de subespacios invariantes ya se conoce desde hace mucho tiempo para operadores compactos [13] y polinomialmente compactos. Los resultados más recientes se basan principalmente en dos técnicas distintas.

La primera es la técnica de V. Lomonosov, quien demostró en el artículo [68] del año 1973 que para todo operador A que no es un múltiplo de identidad y que conmuta con un operador compacto no nulo, existe un subespacio no trivial que es invariante por cualquier operador que conmuta con A. El método novedoso utilizado por Lomonosov originó muchos artículos, que extendieron este resultado a clases de operadores cada vez más amplias, ver Lomonosov [69], Ansari [12] y otros. En el impresionante trabajo de A. Simonič [103] se demuestra que todo operador en un espacio de Hilbert real de forma $A_0 + K$, donde A_0 es autoadjunto y K compacto, tiene un subespacio invariante no trivial.

Las hipótesis de [69], que garantizan la existencia de subespacios invariantes no triviales son tan generales que durante algún tiempo no se conocieron ejemplos de operadores en espacios de Hilbert que no las cumplieran. Finalmente un ejemplo de este tipo fue encontrado en [47].

El segundo método es la técnica de S. Brown, que se originó en su artículo [21], donde se demuestra que cualquier operador subnormal en un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial. Esta técnica resultó ser muy útil para encontrar subespacios invariantes de operadores con espectro masivo, en un sentido u otro. Los primeros trabajos que utilizaron este método se apoyaban en la existencia de un cálculo funcional isométrico para el operador en cuestión, pero luego este método fue extendido a operadores que no poseen tal cálculo. Existen docenas de trabajos que explotan las ideas de S. Brown, entre los que mencionaremos [29, 57, 10, 22, 93] y el libro [25]. El artículo [92] utiliza las ideas de Lomonosov y de S. Brown a la vez.

El libro [96] de Radjavi y Rosenthal está dedicado a la exposición de distintas técnicas para la demostración de la existencia de subespacios invariantes para diferentes clases de operadores.

La descomposición de operadores de Volterra con respecto de cadenas de subespacios invariantes

Un operador se dice que es *un operador de Volterra* si es compacto y su espectro es sólo $\{0\}$. Los operadores cuyo espectro consiste de un sólo punto son una obvia generalización de los bloques de Jordan y por esto fueron muy estudiados. Todo operador de Volterra posee una rica *cadena de subespacios invarantes*. La teoría espectral de estos operadores ha sido desarrollada en diversos trabajos y posteriormente sintetizada en el libro [58]. Un ingradiente esencial de esta teoría es la fórmula de restauración del operador a partir de su parte imaginaria y de una cadena de sus subespacios invariantes. Esta fórmula permite relacionar entre sí las propiedades espectrales de la parte real y de la parte imaginaria del operador de Volterra. Estos resultados abstractos permiten dar, por ejemplo, unos test muy concretos para que las todas las soluciones de un sistema periódico Hamiltoniano de primer orden sean acotadas en todo el eje real.

Debido a estos resultados, es interesante describir *todos los subespacios invariantes* de un operador cuasinilpotente. En los trabajos [Y2] y [Y3] del autor, se demuestra que si una sucesión $\{\lambda_n\}$ es monótona y tiende a cero, entonces el operador shift con pesos λ_n, que actúa sobre ℓ^p según la fórmula

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} (0, \lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \dots),$$

sólo tiene como subespacios invariantes no triviales los espacios

$$\ell^p_N \stackrel{\text{def}}{=} \big\{x = (x_n)_0^\infty \in \ell^p : x_0 = \dots = x_N = 0\big\}, \quad N \geq 0.$$

Este teorema responde a la Pregunta 19 del trabajo [106] de A. Shields, que estaba abierta desde el año 1974. Este trabajo de Shields está muy citado y se reconoce como una referencia clásica sobre los operadores shift con pesos.

La completitud de autovectores. Las cuestiones de completitud de autovectores fueron muy estudiados en la Teoría Espectral para operadores de distintas clases. Es famoso el siguiente teorema de Keldysh [60]: *Sea N un operador normal en un espacio de Hilbert X tal que* $\ker N = 0$ *y* N^k *es un operador con traza para algún* $k > 0$. *Supongamos que el espectro de N se contiene en una unión finita de rayos rectos que salen del origen. Si $T \in B(X)$ es compacto, $I + T$ es invertible y $A = (I + T)N$, entonces el sistema de vectores propios generalizados de A es completa en X.*

Este teorema tiene muchas aplicaciones a operadores diferenciales en una y varias dimensiones, que se obtienen, básicamente, al reformular este enunciado para el operador no acotado A^{-1} en lugar de A, ver [76]. Es importante observar que la completitud de autovectores generalizados de un operador B no acotado es imprencindible para poder aplicar el método de Fourier a la solución de sistemas lineales abstractos $x'(t) = Bx(t)$ y $x''(t) = Bx(t)$, $x(t) \in X$. Estas dos ecuaciones son la base de la física matemática.

Los resultados más recientes sobre la completitud de autovalores incluyen trabajos de Shkalikov [109], de Malamud, Oridoroga y Hasse [70, 87] y muchos otros. El capítulo XI del libro [38] contiene también resultados de este tipo, que no imponen condiciones sobre la geometría del espectro del operador N. Para la bibliografía más amplia, nos referimos al libro [76].

El modelo de Nagy y Foiaş permite dar también un criterio de completitud de autovectores de un operador disipativo.

Para poder garantizar la convergencia de desarrollos que se obtienen a partir del método de Fourier la completitud de autovectores no es suficiente. El mejor caso es el de un operador cuyos autovectores forman una base, equivalente a un sistema ortonormal (tales bases se llaman bases de Riesz). Como esta propiedad muchas veces no se cumple, se estudian también *bases de Riesz con paréntesis*. Una sucesión de vectores $\{e_n\}$ en X se llama base de Riesz con paréntesis si se puede dividir en bloques finitos de tal forma que los subespacios finito dimensionales de X, generados por estos bloques, sean una base de Riesz.

Existen resultados abstractos que dicen que si en la situación del Teorema de Keldysh imponemos hipótesis adicionales, entonces los autovectores generalizados del operador son una base de Riesz con paréntesis. Estos resultados también encuentran aplicaciones a operadores diferenciales [76]. Nos referimos a los reviews de Agranovich [3], [4] para la información adicional sobre el tema.

En las cuestiones que discutiremos a lo largo de esta memoria, es importante también saber demostrar la completitud de autovectores de operadores con un espectro masivo (típicamente, estos autovectores dependen analíticamente del parámetro espectral, cuando éste recorre algunos compenentes del complemento del espectro esencial). Este tema está menos estudiado. Podemos mencionar los resultados de Clancey [26] sobre operadores co-hiponormales y de Clark, Morrel y Wang [27, 28, 116] sobre operadores de Toeplitz.

2. Modelos duales funcionales

2.1. La función de multiplicidad local espectral

En el trabajo [Y14] del autor, se demostró cómo se puede definir la función de multiplicidad local espectral de un operador A en un espacio de Banach separable $\mathcal{X}$ con respecto a una medida arbitraria μ en el plano complejo. Esta función se introduce a partir de las *diagonalizaciones* de A, que van de $\mathcal{X}$ a una integral directa con respecto de μ. Decimos que un operador

$$J : \mathcal{X} \to \int^{\oplus} H(z)\, d\mu(z)$$

diagonaliza el operador A si $JA = M_z J$ y la imagen de J es densa. En [Y14], demostramos que para A y μ fijos, existe una diagonalización J_{univ} de A, que es *universal* en un cierto sentido. En particular, la correspondiente función de dimensión $\dim H_{\mathrm{univ}}$ es maximal, es decir,

$$\dim H_{\mathrm{univ}}(z) \geq \dim H_1(z) \qquad \text{para } \mu\text{-casi todo } z,$$

si J_1 es cualquier otra diagonalización de A. Por definición, la multiplicidad local espectral de A con respecto de μ es esta función:

$$m_{A,\mu}(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim H_{\mathrm{univ}}(z).$$

Hemos demostrado que la multiplicidad local espectral tiene varias buenas propiedades, entre las que destacaremos las siguientes:

1) $m_{A_1 \oplus A_2, \mu} = m_{A_1,\mu} + m_{A_2,\mu}$ en μ-c.t.p;

2) $m_{A,\mu}(z) \leq \nu(A)$ para μ-casi todo z, donde $\nu(A)$ significa la multiplicidad espectral (global) de A.

2.2. Un ejemplo de modelos duales

Antes de proceder a una descripción general de modelos funcionales duales, daremos un ejemplo, que concierne operadores de Toeplitz.

Sea $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ una función continua, donde $\mathbb{T}$ es el disco unidad. *El operador de Toeplitz* se define por la fórmula

$$T_F x = P_+(F \cdot x), \qquad x \in H^2,$$

donde H^2 es el espacio de Hardy y P_+ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$ sobre su subespacio cerrado H^2.

Sea w un punto del plano complejo que no está en la curva $F(\mathbb{T})$. Entendemos por el *índice* de F con respecto de w la cantidad

$$\operatorname{ind}_w(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\,\Delta \arg\big(F(e^{it})-w\big)\Big|_0^{2\pi},$$

donde $\Delta\arg$ denota el incremento del argumento. Si $\operatorname{ind}_w F \geq 0$, entonces el autoespacio $\ker(T_F - wI)$ de T_F es nulo, y el autoespacio $\ker(T_F^* - \bar{w}I)$ del operador conjugado T_F^* es de dimensión $\operatorname{ind}_w F$. De hecho, para cualquier $F \in L^\infty(\mathbb{T})$, $T_F^* = T_{\bar{F}}$.

En esta sección suponemos que F es una función uno a uno y que su imagen es un curva simple cerrada, recorrida en dirección positiva. Nos proponemos a construir una teoría espectral del operador

$$A \stackrel{\text{def}}{=} T_F$$

para este caso. En la Sección 2.5 hablaremos de casos más generales, cuando la curva $F(\mathbb{T})$ tiene interesecciones.

Sea Ω el interior de la curva $F(\mathbb{T})$. Entonces

$$\ker(T_F - wI) = 0, w \notin \partial\Omega, \quad \dim\ker(T_F^* - \bar{w}I) = 1, \qquad w \in \Omega.$$

Se sabe que en nuestro caso,

$$\sigma(T_F) = \operatorname{clos}\Omega.$$

Sea $b(z) \equiv 1 \in H^2$. Denotamos $Bu = b\cdot u$, $u \in \mathbb{C}$. Entonces $B^*x = x(0)$, $x \in H^2$. Se puede demostrar que existe una familia *antianalítica* de autovectores $h_{*,z}$ de A^*, $z \in \Omega$, tales que

$$A^*h_{*,z} = \bar{z}h_{*,z}, \qquad B^*h_{*,z} \equiv 1, z \in \Omega. \tag{2.11}$$

Ponemos

$$(Vx)(z) = \langle x, h_{*,z}\rangle, \quad x \in H^2. \tag{2.12}$$

Las funciones $(Vx)(z)$ que se obtienen son analíticas en Ω. Se obtiene de forma inmediata que la transformada V *diagonaliza el operador* A. En efecto,

$$(VAx)(z) = \langle Ax, h_{*,z}\rangle = \langle x, A^*h_{*,z}\rangle = z\langle x, h_{*,z}\rangle = z(Vx)(z),$$

con lo cual

$$VA = M_zV.$$

Definición. Sea $V : X \to \mathcal{X}$ una transformada lineal, donde X es un espacio de Hilbert y $\mathcal{X}$ es un espacio funcional. Decimos que V *es completo* si $\ker V = 0$.

En el caso de la transformada (2.12), V es completa si y sólo si es completa la familia de autovectores $h_{*,z}$, $z \in \Omega$.

Si sabemos que V es completa, obtenemos que A *se modela por el operador diagonal en el espacio funcional* VH^2. Para poder hablar de un modelo funcional explícito, necesitamos conocer explícitamente este espacio funcional VH^2, es decir, la imagen de V.

Ya que el operador A no tiene autovectores, no podemos utilizar exactamente el mismo procedimiento para diagonalizar A^*. Construiremos su modelo utilizando lo que llamamos *casi autovectores* del sistema (A, B). Daremos su definición en un contexto más general.

Definición. [Y21] Supongamos que tenemos operadores $A : X \to X$, $B : U \to X$, donde X, U son espacios de Hilbert. Decimos que g es un *casi autovector del sistema* (A, B) *que corresponde al número* $z \in \mathbb{C}$ si

$$\exists\, u \in U : \quad (zI - A)g = Bu. \tag{2.13}$$

Usaremos la notación

$$\bar{\Omega} = \{\bar{z} : z \in \Omega\}, \quad \Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad \bar{\Omega}^c = \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}.$$

En nuestro ejemplo, $X = H^2$, $U = \mathbb{C}$ y $Bu = b \cdot u$, $u \in \mathbb{C}$. Poniendo en (2.13) $u = 1 \in \mathbb{C}$, obtenemos una familia $\{h_z\}$ de casi autovectores de A, definida por

$$(zI - A)h_z = b, \qquad \bar{z} \in \Omega^c.$$

Se puede ver que para todo $z \in \Omega^c$, h_z está definido de forma única. La familia $\{h_z\}_{z \in \mathbb{C}\setminus\Omega}$ de funciones en H^2 es analítica. Definimos la transformada V_* por

$$(V_* x_*)(z) = \langle x, h_{\bar{z}} \rangle, \quad x_* \in H^2, z \in \bar{\Omega}^c. \tag{2.14}$$

Se comprueba sin dificultad que

$$V_* A^* = M_z^T V_*$$

(donde M_z^T está definido en (0.1)), es decir, V_* *convierte la acción de* A^* *en la acción del operador diagonal truncado*. De la misma forma que antes, tenemos que demostrar la completitud de la transformada V_* y describir la imagen de V_*. La completitud de V_* es equivamente a la completitud de la familia $\{h_z : z \in \bar{\Omega}^c\}$ de casi autovectores de A.

Los modelos concretos de operadores de Toeplitz T_F y $T_F^* = T_{\bar{F}}$ se obtienen bajo la siguiente hipótesis adicional:

(*) La función F es de clase $C^{1+\varepsilon}(\mathbb{T})$ para algún $\varepsilon > 0$. Se tiene $\frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \neq 0$, $\zeta \in \mathbb{T}$.

Para describir los dos modelos, necesitamos los siguientes subespacios de $L^2(\partial\Omega) = L^2(\partial\Omega, |dz|)$, llamados *espacios de Smirnov*:

$$E^2(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0 \quad \forall z \in \Omega^c \Big\},$$
$$E_0^2(\bar{\Omega}^c) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f \in L^2(\partial\bar{\Omega}) : \int_{\partial\Omega} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0 \quad \forall z \in \bar{\Omega} \Big\}.$$

Toda función $f \in E^2(\Omega)$ se extiende a una función analítica en Ω, utilizando la integral de Cauchy:

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega} \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \qquad z \in \Omega.$$

Se demuestra [40] que para cualquier función $f \in E^2(\Omega)$, sus valores en $\partial\Omega$ se restauran a partir de los valores dentro de Ω como límites no-tangenciales. De la misma forma, podemos interpretar funciones en $E_0^2(\bar{\Omega}^c)$ como funciones analíticas en $\bar{\Omega}^c$. Se tiene que $f(\infty) = 0$ para toda función $f \in E_0^2(\bar{\Omega}^c)$.

Los espacios de Smirnov $E^2(\Omega)$, $E_0^2(\bar{\Omega}^c)$ son una generalización natural de espacios H^2 de Hardy. El libro [40] contiene sus propiedades básicas.

Se verifica la siguiente igualdad

$$E^2(\Omega)^* = E_0^2(\bar{\Omega}^c)$$

respecto a *la dualidad de Cauchy*

$$\langle f, g \rangle_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(z)\bar{g}(\bar{z})\,dz, \quad f \in E^2(\Omega),\ g \in E_0^2(\bar{\Omega}^c). \tag{2.15}$$

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1 ([Y9], [Y21])**.** *Supongamos que la curva $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es simple, cerrada, se recorre el la dirección positiva y satisface (*). Entonces*

(1) El operador V es un isomorfismo de H^2 sobre $E^2(\Omega)$, que transforma $A = T_F$ en el operador diagonal M_z:

$$VT_FV^{-1}f = M_zf, \qquad f \in E^2(\Omega);$$

(2) El operador V_* es un isomorfismo de H^2 sobre $E^2_0(\bar\Omega^c)$, que transforma $A^* = T_{\bar F}$ en el operador diagonal truncado M^T_z:

$$V_* T^*_F V_*^{-1} g = M^T_z g, \qquad g \in E^2_0(\bar\Omega^c);$$

(3) Se tiene la dualidad entre estos dos modelos funcionales:

$$\langle x, x_* \rangle = \langle Vx, V_* x_* \rangle_d, \qquad x, x_* \in H^2.$$

De esta forma, obtenemos dos relaciones de semejanza:

$$A = T_F \sim \big(M_z \text{ en } E^2(\Omega)\big), \qquad A^* = T_{\bar F} \sim \big(M^T_z \text{ en } E^2_0(\bar\Omega^c)\big)$$

Estos dos modelos son duales uno a otro en el siguiente sentido:

$$\big(M_z \text{ en } E^2(\Omega)\big)^* = \big(M^T_z \text{ en } E^2_0(\bar\Omega^c)\big).$$

Este teorema fue demostrado por Clark y Morrel en [27] para funciones F racionales (en una forma un poco dictinta). Posteriormente este resultado fue extendido por Wang [116] para funciones F suaves, que tienen una extensión analítica a un anillo $\{z : r < |z| < 1\}$ para algún $r < 1$. Las mismas ideas fueron utilizadas por D. Xia [120] en el contexto de operadores hiponormales. El caso de operadores de Toeplitz con símbolos que tienen topología mucho más complicada (y sin suponer la existencia de la extensión analítica a un anillo) fue investigado en los trabajos del autor [Y7, Y9, Y21] y otros, ver §2.5.

2.3. Ideas principales de la construcción de modelos duales

Más adelante describiremos las construcciones de modelos funcionales para cada una de las tres clases de operadores, mencionadas en la introducción. Aquí describimos nuestro esquema general. Precisaremos y modificaremos este esquema a continuación, ajustándolo a cada una de estas clases.

Para construir la diagonalización de un operador A en un espacio de Hilbert X, proponemos proceder de la siguiente manera.

1) Se definen espacios modelos $\mathrm{Mod}(A)$ y $\mathrm{Mod}(A^*)$ de A y de A^* y operadores modelos

$$M_A \in \mathcal{B}(\mathrm{Mod}(A)), \qquad M_{A^*} \in \mathcal{B}(\mathrm{Mod}(A^*)).$$

Los espacios $\mathrm{Mod}(A)$ y $\mathrm{Mod}(A^*)$ pueden ser espacios de funciones o espacios cocientes de dos espacios de funciones. Los operadores modelos suelen ser de uno de los tres tipos, descritos en la Introducción. En el ejemplo de la Sección 2.2, teníamos

$$M_A = M_z, \quad M_{A^*} = M_z^T, \quad \mathrm{Mod}(A) = E^2(\Omega), \quad \mathrm{Mod}(A^*) = E_0^2(\bar{\Omega}^c).$$

2) Se define *la dualidad de Cauchy* $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ entre $\mathrm{Mod}(A)$ y $\mathrm{Mod}(A^*)$, que es una forma Hermítica acotada en $\mathrm{Mod}(A) \times \mathrm{Mod}(A^*)$. Se demuestra la igualdad

$$\big(\mathrm{Mod}(A)\big)^* = \mathrm{Mod}(A^*) \tag{2.16}$$

con respecto a la forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$.

3) Se definen las transformadas

$$V : X \to \mathrm{Mod}(A), \qquad V_* : X \to \mathrm{Mod}(A^*) \tag{2.17}$$

(más adelante comentaremos sobre sus definiciones). Estas transformadas tienen que convertir la acción de A y de A^*, respectivamente, en la acción de operadores modelo:

$$VA = M_A V, \qquad V_* A^* = M_{A^*} V_*. \tag{2.18}$$

El objetivo de la construcción es demostrar el siguiente teorema

Teorema de Modelización Dual. *Las transformadas V, V_* son invertibles. La transformada V convierte al operador A en el operador modelo M_A en el espacio funcional* $\mathrm{Mod}(A)$*, y la transformada V_* convierte al operador A^* en el operador modelo M_{A^*} en el espacio* $\mathrm{Mod}(A^*)$*. Es decir, se tienen las igualdades*

$$VAV^{-1} = M_A, \qquad V_* A^* V^{*-1} = M_{A^*}.$$

La siguente observación explica la ventaja de construir simultáneamente modelos de A y A^*.

Proposición 2.2. *Supongamos definidos las transformadas (2.17), acotadas y que cumplen (2.18). Supongamos que una forma hermítica bilineal acotada $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ define una dualidad entre los espacios* $\mathrm{Mod}(A)$ *y* $\mathrm{Mod}(A^*)$*, de tal forma que se tiene (2.16). Supongamos que*

$$\langle x, y \rangle = \langle Vx, V_* y \rangle_d, \qquad \forall x, y \in X. \tag{2.19}$$

Entonces $\ker V = 0$ *si y sólo si* $\ker V_* = 0$*. Si se tiene una de estas dos igualdades, se cumple el Teorema de Modelización dual. En este caso, además, los modelos que se obtienen son duales: $M_A^* = M_{A^*}$.*

El esquema general de la construcción de las transformadas V y V_* y de los espacios modelos $\mathrm{Mod}(A)$**,** $\mathrm{Mod}(A^*)$**.** Para llevar a cabo este programa, proponemos incluir el operador lineal A en *un sistema* de tres operadores lineales (A, B, C), donde

$$B : U \to X, \qquad C : X \to Y, \tag{2.20}$$

siendo U y Y unos espacios de Hilbert auxiliares (finito o infinito dimensionales). Si A no es acotado, se admite que B y C sean también operadores no acotados de cierto tipo (ver Capítulo 3). Ponemos

$$\rho_{\mathrm{ess}}(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(A),$$

donde $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ es el espectro esencial[4] de A. El conjunto $\rho_{\mathrm{ess}}(A)$ es abierto y contiene un entorno de ∞.

Definimos una familia de vectores $h_{z,u,y}$, $z \in \rho_{\mathrm{ess}}(A)$, $(u, y) \in U \oplus Y$, por las igualdades

$$(\bar{z}I - A^*)h_{z,u,y} = C^*y, \tag{2.21}$$

$$B^*h_{z,u,y} = u. \tag{2.22}$$

Observamos que $h_{z,u,y}$ es un casi autovector del sistema (A^*, C^*), que corresponde al “autovalor” $\bar{z}$.

Vamos a suponer que el sistema (A, B, C) se elige de tal forma que *para cualquier terna de z, u, y fijos, existe a lo sumo un vector $h = h_{z,u,y}$ que satisface (2.21)–(2.22).*

Definiciones.

1) Sea $z \in \rho_{\mathrm{ess}}(A)$. Definimos un subespacio $\mathcal{F}(z)$ de $U \oplus Y$ de la siguiente forma:

$$(u, y) \in \mathcal{F}(z) \iff \exists h = h_{z,u,y}.$$

2) Definimos *el ultraespectro $\mathcal{F}$ del sistema* (A, B, C) como la siguiente familia de espacios:

$$\mathcal{F} = \left\{\mathcal{F}(z)\right\}_{z \in \rho_{\mathrm{ess}}(A)}. \tag{2.23}$$

Podemos decir que el ultraespectro es una especie de fibrado, cuyas fibras $\mathcal{F}(z)$ no tienen dimensión fija. En muchos casos, $\dim \mathcal{F}(z)$ es localmente

[4]Se puede definir $\rho_{\mathrm{ess}}(A)$ como el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $\dim \ker(A - zI) < \infty$, $\dim \ker(A^* - \bar{z}I) < \infty$ y la imagen $(A - zI)X$ es cerrada. Se tienen las inclusiones $\rho_{\mathrm{ess}}(A) \supset \rho(A)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \subset \sigma(A)$.

constante en $\rho_{\mathrm{ess}}(A)$. Entonces $\{\mathcal{F}(z)\}$ es una familia anti-analítica en cada componente del abierto $\rho_{\mathrm{ess}}(A)$.

Denotamos por $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}^*)$ el espacio vectorial de todas las secciones holomorfas del fibrado $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{F}^*(z)\}_{z\in\rho_{\mathrm{ess}}(A)}$.

Dado un sistema (A, B, C), definimos la transformada V de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V = V_{A,B,C} &: X \to \mathrm{Hol}(\mathcal{F}^*), \\ \big(V\,x_0(z)\big)(u \oplus y) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle x_0, h_{z,u,y}\rangle, \qquad u \oplus y \in \mathcal{F}(z). \end{aligned} \tag{2.24}$$

El sistema (A^*, C^*, B^*) se llama *dual* del sistema (A, B, C). Esta noción es estándar en la Teoría lineal de control. Aquí la aplicamos a la teoría de modelos funcionales.

Se puede ver que el ultraespectro del sistema dual (A^*, C^*, B^*) es la familia de espacios

$$\mathcal{F}_\perp^{\mathrm{adj}} = \{\mathcal{F}(\bar z)^\perp\}_{z\in\rho_{\mathrm{ess}}(A)},$$

donde $\mathcal{F}(\bar z)^\perp$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{F}(\bar z)$ con respecto del producto escalar indefinido $\langle u_1 \oplus y_1, u_2 \oplus y_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle - \langle y_1, y_2\rangle$. Ponemos

$$V_* = V_{A^*,C^*,B^*}.$$

Los espacios modelos se buscan de tal forma que verifiquen

$$VX \subset \mathrm{Mod}(A) \subset \mathrm{Hol}(\mathcal{F}^*), \qquad V_*X \subset \mathrm{Mod}(A^*) \subset \mathrm{Hol}(\mathcal{F}_\perp^*).$$

Es fácil demostrar que se tienen las igualdades (2.18), si definimos los operadores modelos M_A, M_{A^*} como operadores diagonales truncados (0.1).

Según la Proposición 2.2, para llevar a cabo este programa, tenemos que definir una dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_d$ entre $\mathrm{Mod}(A)$ y $\mathrm{Mod}(A^*)$, análoga a la dualidad de Cauchy, y demostrar que se cumplen (2.16), (2.19). En los siguientes apartados, veremos cómo funciona este esquema para clases más concretas de operadores.

2.4. Operadores cuyo espectro posee una estructura analítica asimétrica

En el artículo [Y21] hemos desarrollado el esquema anterior para un operador A con cierta asimetría espectral. La modelización de estos operadores se obtiene a partir de su inclusión en un sistema $(A, B, 0)$, $B : U \to X$, siendo innecesario el operador C. Supondremos que Y es finito dimensional.

En otras palabras, ponemos $C = 0$ en la construcción anterior. En este caso, escribiremos $(A, B, -)$ en vez de $(A, B, 0)$. De la misma forma, escribiremos $(A, -, C)$ para denotar un par de operadores $A : X \to X$, $C : X \to Y$.

En el artículo [Y21] se desarrollan el esquema abstracto para operadores de esta clase y su aplicación a operadores de Toeplitz con símbolos suaves. Posteriormente el mismo esquema asimétrico fue aplicado a operadores subnormales [Y16, Y22, P11] y a operadores hiponormales [Y12, Y18, P3].

El esquema de la Sección 2.2 es un caso muy simple de operadores de la clase que estamos descibiendo.

Las hipótesis abstractas sobre el sistema $(A, B, -)$ que aparecen en [Y21] son las siguientes:

(A1) $\ker(A - zI) = 0$ para todo $z \in \rho_{\text{ess}}(A)$.

(A2) Para cualquier $z \in \rho_{\text{ess}}(A)$, B^* es uno a uno en el autoespacio $\ker(A^* - \bar{z}I)$.

Para este caso, el ultraespectro (2.23) del sistema $(A, B, 0)$ viene dado por

$$\mathcal{F}(z) = B^* \ker(A^* - \bar{z}I), \quad z \in \rho_{\text{ess}}(A).$$

Supongamos que $\sigma_{\text{ess}}(A)$ es una unión finita de curvas suaves a trozos. Utilizaremos la notación $\sigma_{\text{ess}}(A) = \gamma$. En [Y21] se obtuvieron los siguientes resultados.

A) Hemos definido *ultraespectros $\mathcal{F}$ de tipo H^∞* (se caracterizan por la existencia de una familia acotada de proyecciones $P : \rho_{\text{ess}}(A) \to \mathcal{B}(Y)$, $P(z)^2 \equiv P(z)$, que son antianalíticas en cada una de las componentes de $\rho_{\text{ess}}(A)$ y satisfacen $\mathcal{F}(z) = P(z)Y$, $z \in \rho_{\text{ess}}(A)$). Entre ellos, destacamos una clase de ultraespectros que llamamos regulares. Para los ultraespectros de clase H^∞, los espacios $\mathcal{F}(z)$ tienen *valores frontera* sobre γ en un sentido natural. Fijando una orientación para cada una de las curvas que componen γ, podemos hablar de los valores frontera interiores y exteriores, que se van a denotar por $\mathcal{F}_i(z)$, $\mathcal{F}_e(z)$, $z \in \gamma$.

B) Para ultraespectros de esta clase, se definen de forma natural los espacios de Smirnov $E^2(\mathcal{F}^*)$, $E^2_0(\mathcal{F}^*_\perp)$, que son espacios de Hilbert. Los elementos de estos espacios consisten, respectivamente, de las secciones analíticas de los fibrados $\{\mathcal{F}^*(z)\}$ y $\{\mathcal{F}^{\text{adj}\,*}_\perp(z)\}$, donde $\mathcal{F}^{\text{adj}}_\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{F}_\perp(\bar{z})\}$. Igual que en el caso de los espacios de Smirnov usuales, las funciones en estos espacios tienen valores frontera en γ.

C) Se define **el espacio modelo** $\mathrm{Mod}(\mathcal{F})$ a tavés de las siguientes relaciones frontera en $\gamma = \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$:

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{F}) \overset{\mathrm{def}}{=} \big\{ f \in E^2(\mathcal{F}^*) : f_i(z)\big|\mathcal{F}_i(z) \cap \mathcal{F}_e(z) \\ = f_e(z)\big|\mathcal{F}_i(z) \cap \mathcal{F}_e(z), \text{ para casi todo } z \in \gamma \big\}. \quad (2.25)$$

Este espacio modelo es un subespacio cerrado de $E^2(\mathcal{F}^*)$. De la misma manera, se define **el segundo espacio modelo** $\mathrm{Mod}(\mathcal{F}_\perp^{\mathrm{adj}})$, que es un subespacio cerrado de $E_0^2(\mathcal{F}_\perp^{\mathrm{adj}})$.

Se introduce la dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ de Cauchy entre estos dos espacios modelos (su definición es, de alguna forma, análoga a (2.15)). En [Y23], se demuestra que se tiene la identificación

$$\big(\mathrm{Mod}(\mathcal{F})\big)^* = \mathrm{Mod}(\mathcal{F}_\perp^{\mathrm{adj}})$$

con respecto de esta dualidad.[5]

D) Se obtiene el siguiente resultado abstracto sobre el cumplimiento del Teorema de Modelización dual:

Teorema 2.3 ([Y21])**.** *Supongamos que se cumplen (A1), (A2) y que el ultraespectro $\mathcal{F}$ del sistema $(A, B, -)$ es de tipo H^∞ y regular. Definimos las transformadas $V = V_{A,B,-}$ y $V_* = V_{A^*,-,B^*}$ por las fórmulas (2.24). Supongamos que*

$$VX \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{F}), \qquad V_*X \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{F}_\perp^{adj}).$$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Los autovectores de A^* que corresponden a autovalores $\bar{z}$, $z \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ son completos en X.

(ii) Los casi autovectores de $(A, B, -)$ que corresponden a autovalores $z \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ son completos en X.

(iii) Se tiene la identidad (2.19), que expresa la dualidad entre transformadas V y V^*.

[5] Esta propiedad es cierta para cualquier curva γ (ó unión finita de curvas) y cualquier familia $\mathcal{F} : \mathbb{C} \setminus \gamma \to Y$ regular de clase H^∞, incluso si no provienen de ningún operador A.

Si se cumple alguna de las afirmaciones (i)–(iii), entonces se cumple el Teorema de Modelización dual, donde los espacios modelos y los operadores modelos de A y A^* son los siguientes:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}(A) &= \mathrm{Mod}(\mathcal{F}), & \mathrm{Mod}(A^*) &= \mathrm{Mod}(\mathcal{F}_\perp^{adj}), \\ M_A &= M_z, & M_{A^*} &= M_z^T. \end{aligned}$$

Podemos mencionar que los *núcleos reproductores* de los espacios modelos $\mathrm{Mod}(\mathcal{F})$, $\mathrm{Mod}(\mathcal{F}_\perp^{\mathrm{adj}})$ (que son a la vez núcleos de Cauchy) juegan un papel destacado en la demostración de estos resultados.

En los siguientes dos secciones daremos las aplicaciones de este esquema a operadores de Toeplitz y operadores hiponormales.

2.5. Operadores de Toeplitz

Hemos demostrado en [Y21] que el Teorema 2.3 se aplica a los operadores de Toelpitz, cuyo símbolo tiene índices no negativos. Más precisamente, llamemos $\mathcal{T}$ la clase de símbolos $F \in C^{1+\varepsilon}(\mathbb{T})$ para algún $\varepsilon > 0$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\dfrac{dF(\zeta)}{d\zeta} \neq 0$, $\zeta \in \mathbb{T}$.

(ii) La curva $\gamma \overset{\mathrm{def}}{=} F(\mathbb{T})$ tiene sólo un número finito de intersecciones.

(iii) $\mathrm{ind}_z F \geq 0$ para todo z, que no pertenece a $F(\mathbb{T})$.

La construcción descrita en la Sección 2.4 se aplica a todo operador $A \overset{\mathrm{def}}{=} T_F$ con símbolo de esta clase. Basta poner

$$\begin{aligned} &U = \mathrm{Lin}\,(1, z, \dots, z^N), \\ &B : U \to H^2, \qquad Bu = u, \quad u \in H^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformada $V = V_{T_F, B, -}$ convierte al operador $A \overset{\mathrm{def}}{=} T_F$ en el operador diagonal M_z en el espacio funcional $\mathrm{Mod}(A) = \mathrm{Mod}(\mathcal{F})$. Y la transformada $V_* = V_{T_F^*, 0, B^*}$ convierte al operador T_F^* en el operador diagonal truncado M_z^T en el espacio $\mathrm{Mod}(A^*) = \mathrm{Mod}(\mathcal{F}_\perp)$. Se tienen las igualdades

$$V T_F V^{-1} = \big(M_z \text{ en } \mathrm{Mod}(\mathcal{F})\big), \qquad V_* A^* V^{*-1} = \big(M_z^T \text{ en } \mathrm{Mod}(\mathcal{F}_\perp)\big).$$

Este resultado es un análogo del Teorema 2.1 para el caso de geometría de F mucho más complicada.

Los primeros resultados sobre la diagonalización de operadores de Toeplitz fueron obtenidos por M. Rosenblum [101] para el caso de operadores de Toeplitz autoadjuntos y por Peter Duren [39] para símbolos F de la forma $F(z) = az + bz^{-1}$, $a, b \in \mathbb{C}$ (que recorren una elipse). Posteriormente, Clark y Morrel obtuvieron resultados de este tipo para símbolos F racionales tales que $F(\mathbb{T})$ no tiene intersecciones [27] y para diferentes clases de símbolos racionales con una estructura geométrica especial [28], que fueron llamados "símbolos con lazos". El artículo de Wang [116] contiene un resultado del Teorema 2.1 para funciones F de clase $C^4(\mathbb{T})$, que tienen una extensión analítica a un anillo $\{z : r < |z| < 1\}$ para algún $r < 1$.

Una de las dificultades para la construcción de una teoría espectral de esta clase de operadores es encontrar una forma adecuada de modelo. El autor de la Memoria dedicó varios artículos a los operadores de Toeplitz, donde se consideran diferentes clases de símbolos y se dan diferentes formulaciones del resultado general, ver [Y5], [Y7], [Y9] [Y21].

Consideremos, por ejemplo, la clase $\mathcal{T}_{\mathrm{Pol}}$ de símbolos, que consiste de funciones F de la clase $\mathcal{T}$ en la circunferencia, que tienen una representación $F = P/Q$, donde $P \in H^\infty$ y Q es un polinomio, $Q|\mathbb{T} \neq 0$. En [Y7], hemos construido un modelo de operadores de Toeplitz con símbolos $F \in \mathcal{T}_{\mathrm{Pol}}$. Este modelo representa al operador T_F como operador de multiplicación por la variable independiente en un espacio de funciones analíticas sobre una superfie de Riemann R, asociada a F. Tanto R como este espacio de funciones sobre R se definen de forma explícita.

Vamos a enumerar los corolarios de este último resultado. Algunos de ellos se obtienen de forma inmediata, y la demostración de otros requiere un trabajo considerable.

1) Se demuestra que los autovectores de T_F^* que corresponden a autovalores z fuera de la curva $\bar{F}(\mathbb{T})$ son completos. Se tiene lo mismo para los casi autovectores de T_F.

2) Se define el cálculo funcional para el operador de Toeplitz T_F con funciones analíticas en $\operatorname{int}\sigma(T_F)$ de clase H^∞. La fórmula para el cálculo en el modelo es $\varphi(M_z) = M_{\varphi(z)}$. Este cálculo está bien definido porque

$$\varphi \in H^\infty(\operatorname{int}\sigma(T_F)),\ f \in \operatorname{Mod}(\mathcal{F}) \Rightarrow \varphi \cdot f \in \operatorname{Mod}(\mathcal{F}).$$

3) Para los símbolos F que satisfacen cierta condición geométrica (son "de tipo torre" [Y11]), se demuestra que la multiplicidad espectral $\nu(T_F)$ es igual a $\operatorname{máx}_z \operatorname{ind}_z F$.

4) Para símbolos de clase $\mathcal{T}_{\text{Pol}}$ (con una condición adicional no restrictiva), se da una descripción completa del conmutante[6] $\{A\}'$ de T_F (ver [Y7], Capítulo 2). Resulta que $\{T_F\}'$ es isomorfo al álgebra $H^\infty\big(R_{**}\big)$ donde $R_{**} = R_{**}(F)$ es una superficie de Riemann, construida a partir de la superficie R. En particular, si dos operadores conmutan con T_F, entonces conmutan entre sí.

5) Para estos símbolos, se demuestra que si T_{F_1} y T_{F_2} son similares, entonces las superficies de Riemann $R_{**}(F_1)$ y $R_{**}(F_2)$ son isomorfas. Como consecuencia, se obtiene un criterio de semejanza de operadores de Toeplitz T_{F_1} y T_{F_2} (ver [Y7], Capítulo 3).

6) Se obtiene una descripción completa de los subespacios invariantes de T_F para el caso en el que F es de tipo torre y pertenece a $\mathcal{T}_{\text{Pol}}$, ver [Y7], Capítulos 4 y 5. Esta caracterización utiliza el Teorema de Lax–Halmos, los espacios débiles $L_0^{1,\infty}$ (y los correspondientes espacios de funciones analíticas) y lo que podemos llamar la técnica del pegado de las integrales de Cauchy.

7) Para esta misma clase de símbolos, hemos calculado en [Y11] la multiplici

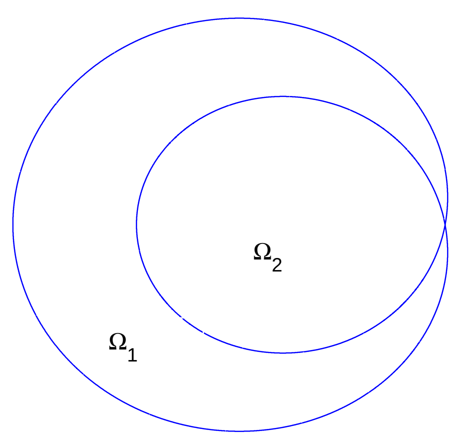

Figura 1: La imagen $F(\mathbb{T})$ para una función F con índices 1 y 2

Resumiendo, podemos afirmar que *para esta clase de operadores de Toeplitz*

[6]El conmutante $\{A\}'$ de un operador A es el conjunto de todos los operadores que conmutan con él. Es siempre un álgebra de operadores débilmente cerrado.

el modelo funcional construido permite hallar respuestas satisfactorias a muchas de las típicas preguntas de carácter espectral.

Es importante mencionar también que en el caso de operadores de Toeplitz, introduciendo coordenadas en las fibras de $\mathcal{F}$, se puede reescribir el operador modelo M_z en el espacio modelo $\mathrm{Mod}(\mathcal{F})$ de una forma equivalente muy concreta, como se demuestra en [Y9]. Por ejemplo, para el símbolo F de orientación no negativa, cuya imagen $F(\mathbb{T})$ está dibujada en Fig. 1, el operador modelo se transforma en el operador M_z en el espacio

$$\big\{f \oplus g \in E^2(\Omega_1) \oplus E^2(\Omega_2, \mathbb{C}^2) : g_1 + \xi g_2 = f \text{ en } \partial\Omega_2\big\},$$

donde $\xi : F(\mathbb{T}) \to \mathbb{T}$ se define (salvo en el punto de autointersección) como la función inversa de F.

2.6. Operadores hiponormales

El esquema abstracto de la Sección 2.4 se aplica también a operadores hiponormales, aunque los resultados que hemos obtenido de momento son menos definitivos que para operadores de Toeplitz.

Un operador A en un espacio de Hilbert X se llama *hiponormal* si

$$D \stackrel{\text{def}}{=} A^*A - AA^* \geq 0;$$

al operador D se le llama *el defecto del operador hiponormal* A. Se dice que A es *puro hiponormal* si es hiponormal y no posee ningún subespacio invariante $X_1 \neq 0$ tal que $A|X_1$ sea normal. Hay varios libros dedicados a la teoría de estos operadores, entre los que mencionaremos el libro [74] de Martin y Putinar.

Es un hecho conocido que un operador hiponormal puro no puede tener autovectores, lo que sugiere intentar aplicar el esquema de §2.4 a esta clase de operadores.

Se demuestra que uno puede poner $B = D^{1/2}$ en la definición del ultraespectro, que hemos dado en §2.4.

Estos modelos están relacionados íntimamente con los modelos bidimensionales de Clancey, Martin and Putinar del operador hiponormal T en espacios de distribuciones (ver [74]).

En [Y12] introducimos un modelo bidimensional para A^* y la dualidad natural entre estos dos modelos. El modelo de Martin–Putinar del operador

A y nuestro modelo de A^* se basan en funciones $K_0(z)$, $C_0(z)$, asociados al operador A. Estas funciones se obtienen a partir de las fórmulas

$$A^* - \bar{z}I = K_0(z)(A - zI), \quad K_0(z)|\ker(A^* - \bar{z}I) = 0, \tag{2.26}$$

$$D^{1/2} = (A^* - \bar{z}I)C_0(z), \quad C_0^*(z)|\ker(A^* - \bar{z}I) = 0 \tag{2.27}$$

que definen de forma única las contracciones $C_0(z) : D_A \to X$ and $K_0(z) : X \to X$ (aquí $D_A = \operatorname{clos} DX$). Las transformadas que llevan A y A^*, respectivamente, en sus modelos, son las siguientes:

$$V_A x(z) = -\bar{\partial}(C_0^* x)(z), \quad V_{A^*} x(z) = D^{1/2}\partial(K_0^* x)(z)$$

donde $\partial = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$, $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Las imágenes de los vectores de X por estas transformadas son distibuciones de orden 1. Demostramos la completitud del modelo de A^* en el espacio de distribuciones y las fórmulas de acción de A y A^* en este modelo.

En [Y12], damos condiciones suficientes para poder reescribir estos modelos en forma de modelos analíticos duales de A en el sentido de §2.4. Para demostrar la completitud del modelo analítico dual de A^*, necesitamos conocer la continuidad de funciones $C(\cdot)$, $K(\cdot)$ fuera de un subconjunto del plano complejo de capacidad analítica nula.

2.7. Operadores subnormales y curvas algebráicas

Un operador A en un espacio de Hilbert H se llama subnormal si existe un operador normal $N : K \to K$ tal que $NH \subset H$ y $A = N|H$, y puro subnormal si A no tiene parte normal no trivial. Todo operador subnormal es hiponormal, pero la afirmación inversa es falsa.

En el estudio de esta clase de operadores la teoría de operadores abstracta interfiere con el Análisis complejo y la Teoría de potencial de forma muy interesante. Nos podemos referir, por ejemplo, al libro de Conway [31] y al trabajo de Thomson [114].

Los resultados de D. Xia que aparecen en [119] dicen que el operador $D = A^*A - AA^*$ restringido a $M \overset{\text{def}}{=} \operatorname{clos} DH$ y el operador $\Lambda = (A^*|M)^*$ determinan el operador A. Xia descubrió el papel esencial de la función "mosaico"

$$\mu(z) = P_M(N - AP_H)(N - z)^{-1}|M, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(N),$$

cuyos valores son proyecciones paralelas en M.

Podemos plantearnos el siguiente problema:

Problema. Describir todos los operadores subnormales A tales que el operador $D = A^*A - AA^*$ tenga rango finito.

Para esta clase de operadores, esencialmente, D y Λ son matrices. En este caso decimos que A es un operador subnormal *de tipo finito*.

En [117]–[119], Xia propuso un acercamiento a este problema y demostró muchas propiedades interesantes de estos operadores.

En [Y16, Y22], hemos dado una completa descripción de operadores subnormales de tipo finito. La respuesta depende de las propiedades de la curva algebraica

$$\Delta = \big\{(z, w) : \det\big(D - (w - \Lambda^*)(z - \Lambda)\big) = 0\big\}$$

en $\mathbb{C}^2$. Llamaremos a esta curva *la curva discriminante de A*.

La relación con los modelos funcionales duales asimétricos se obtiene al considerar el sistema $(A, B, 0)$, donde $B = D^{1/2}$.

En [Y16], [Y22], uno puede encontrar los siguentes resultados:

(1) Una descripción completa de pares (D, Λ) que pueden aparecer en relación a un operador subnormal A. Resulta que en particular, Δ debe satisfacer la siguente condición: $\Delta \cap \{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{C}\}$ divide cada componente irreducible de la curva algebráica Δ (salvo componentes $z \equiv$ const, $w \equiv$ const) en dos componentes conexas.

(2) Una expresión para la función mosaica de Xia en términos de D y Λ.

(3) Una conexión entre el modelo de Xia de operadores subnormales y modelos analíticos duales asimétricos en el sentido de la Sección 2.4.

(4) La descripción de todos operadores A posibles a los que corresponde una curva discriminante Δ fija.

Aplicando los resultados de [110], [Y7], podemos deducir también caracterizaciones de sistemas cíclicos y de subespacios invariantes de operadores subnormales de tipo finito.

En [P11], hemos introducido las curvas algebráicas en $\mathbb{C}^3$ con propiedades especiales, que hemos llamado "curvas tipo Ahlfors". También encontramos una relación directa entre operadores subnormales de tipo finito, cuya mínima extensión normal no tiene espectro puntual, operadores de Toeplitz con símbolos matriciales racionales, cuyos valores en la circunferencia $\mathbb{T}$ son matrices normales, y curvas tipo Ahlfors. Hemos aplicado estos resultados a la descripción de dominios de cuadraturas, ver Capítulo 4 más adelante.

2.8. Perturbaciones suaves de operadores normales con espectro dos-dimensional.

Sea N un operador normal cuya medida espectral es absolutamente continua con respecto al área, y sea $A = N + K$ su perturbación. Supongamos que K tiene traza y es suficientemente "suave". En [Y10], introducimos *la función perturbación* Ψ, que está definida en todo el plano complejo y cuyas valores son operadores. Aquí sólo daremos la fórmula de Ψ para el siguiente caso: supongamos que N ya viene dado en su forma espectral

$$Nf(z) = zf(z), \qquad f \in X \stackrel{\text{def}}{=} \int^{\oplus} E(z)\, dx\, dy$$

y que K tiene rango finito: $(Kf)(z) = \sum_1^N \langle f, \alpha_j \rangle \beta_j(z)$, donde $\alpha_j, \beta_j \in X$. Entonces

$$\Psi(\lambda) = \left\{ \delta_{jk} + \int \frac{\langle \beta_j(z), \alpha_k(z) \rangle_{E(z)}}{\lambda - z}\, dx\, dy \right\}_{j,k=1}^{N}.$$

En [Y10], demostramos que A se representa a través de su *modelo cociente*, que es el operador de la multiplicación por la variable independiente en el cociente de un cierto espacio de Sobolev, no isótropo, por su subespacio de funciones de forma $\Psi \cdot a$, donde a es una función vectorial analítica. Este modelo permite responder a muchas preguntas sobre operadores A de este tipo: construir un cálculo funcional no analítico, hacer el estudio de la semejanza lineal de operadores de esta clase y de sus singularidades espectrales, estudiar la completitud de autovectores generalizados [P2], dar las condiciones que aseguran la descomposición del espectro de operadores de esta clase, etc. En particular, demostramos que el operador perturbado $N + K$ es similar al operador no perturbado N si y sólo si el determinante de Ψ no se anula en el plano.

Se puede dar también ejemplos cuando el operador $N + K$ de este tipo no es descomponible.

En [105] se estudiaron operadores de una clase parecida en relación con el método de operadores de ondas. En una serie de trabajos de Cheremshantsev (ver [24]), se encontró la relación entre el estudio espectral de estos operadores y el problema de scattering de una partícula browniana. En todos estos trabajos, se hace la hipótesis de que la pertubación es pequeña en un sentido u otro, que nosotros no necesitamos.

3. El modelo tipo Nagy y Foiaş en dominios en el plano complejo

En esta sección, describiremos el modelo que hemos introducido en [Y23] y que seguimos investigando en la actualidad (ver [P6, P10, P12] y los trabajos [P7]–[P9] en colaboración con S. Verduyn Lunel). Veremos que se puede introducir dos modificaciones de este modelo, que llamaremos *el modelo observavión* y *el modelo control*. La motivación de estos nombres se debe a la estricta relación que existe entre estos modelos y la teoría de control lineal de sistemas infinito dimensionales.

Se puede considerar estos modelos como una generalización del modelo original de Sz.-Nagy—Foiaş, que hemos descrito en §1.2. El modelo de Sz.-Nagy—Foiaş sólo se construye en un disco o en un semiplano y el modelo que describimos a continuación se relaciona con un dominio bastante arbitrario. Pero incluso para el caso de un disco o un semiplano, nuestro modelo tiene varias diferencias con el modelo original de Nagy y Foiaş (que se van a precisar más adelante).

Dedicamos a este modelo un capítulo separado. Sin embargo, como veremos, él se ajusta al esquema general de modelos funcionales duales de la Sección 2.3.

Es oportuno hacer también el siguiente comentario. En el caso de otros modelos funcionales, el paso de la construcción del modelo al hallazgo de las respuestas a las demás preguntas "espectrales" típicas (la descripción del conmutante, de espacios invariantes, etc.) suele ser bastante complicado. Sin embargo, para el modelo tipo Nagy–Foiaş este paso es automático, porque podemos usar numerosos resultados ya existentes para el modelo de Nagy y Foiaş original. Como veremos, hay muchos ejemplos prácticos de operadores para los que no se aplica el modelo de Nagy y Foiaş original y sí se aplica nuestra construcción.

Las referencias recientes sobre diferentes aplicaciones del modelo de Nagy y Foiaş incluyen los libros de Nikolski [83], [84], de Foais–Frazho [44], los artículos [90, 80, 79, 8] y otros.

3.1. La definición del modelo

Espacios modelo $\mathcal{H}(\delta)$. Supongamos que Ω_{int} y Ω_{ext} son dos dominios en plano complejo $\mathbb{C}$ tales que $\Gamma = \partial\Omega_{\text{int}} = \partial\Omega_{\text{ext}}$ es una curva suave a trozos y $\Omega_{\text{int}} \cap \Omega_{\text{ext}} = \emptyset$, $\mathbb{C} = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma \cup \Omega_{\text{ext}}$. Los modelos que vamos a definir se aplicarán a operadores A (posiblemente, no acotados), cuyo espectro está contenido en $\operatorname{clos} \Omega_{\text{int}}$.

Se supone que la curva Γ es homeomorfa al círculo o a la recta; en este último caso los dos cabos de Γ se tienen que ir al infinito.[7] Hacemos la siguiente hipótesis:

$$(|z| + 1)^{-1} \in L^2(\Gamma, |dz|).$$

Supongamos que U, Y son unos espacios de Hilbert auxiliares. Sea Ω uno de los dominios Ω_{int}, Ω_{ext}. Ponemos $\widehat{E}^2(\Omega, Y) = E^2(\Omega, Y)$, si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no es acotado, y

$$\widehat{E}^2(\Omega, Y) = \big\{ v \in E^2(\Omega, Y) : v(\infty) = 0 \big\},$$

si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es acotado. Orientamos la curva Γ de tal forma que, al recorrerla, el dominio Ω_{int} se quede por la izquierda.

Definición. Sea δ una función de clase $H^\infty\big(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{B}(Y, U)\big)$.

1) Decimos que δ es *admisible* si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\|\delta(z)y\| \geq \varepsilon \|y\|$, $y \in Y$ para casi todo $z \in \Gamma$.

2) Introducimos la función $\delta^{\mathbf{T}} \in H^\infty\big(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{B}(U, Y)\big)$,

$$\delta^{\mathbf{T}}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \delta^*(\bar{z}), \qquad z \in \overline{\Omega}_{\text{int}}.$$

Decimos que δ es $*$-*admisible* si $\delta^{\mathbf{T}} \in H^\infty\big(\overline{\Omega}_{\text{int}}, \mathcal{L}(U, Y)\big)$ es admisible, lo que equivale a la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que $\delta(z)\delta^*(z) \geq \varepsilon I$ para casi todo $z \in \Gamma$.

3) Decimos que δ es *doblemente admisible* si es admisible y $*$-admisible, es decir, si existe δ^{-1} en casi todas partes de Γ y se cumple $\|\delta^{-1}(z)\| \leq C$, c.t. $z \in \Gamma$.

Definición. Sea $\delta \in H^\infty\big(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(Y, U)\big)$ una función $*$-admisible. Le asociamos *el espacio modelo*

$$\mathcal{H}(\delta) = \mathcal{H}(\delta, \Omega_{\text{int}}) = \big\{ f \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{ext}}, Y) : \delta \cdot f | \Gamma \in \widehat{E}^2(\Omega_{\text{int}}, U) \big\}. \tag{3.28}$$

En nuestra situación, *el operador diagonal truncado* $M_z^{\mathbf{T}}$ en $\mathcal{H}(\delta)$ puede resultar ser no acotado. Se define de la siguiente forma. Su dominio es

$$\mathcal{D}(M_z^{\mathbf{T}}) = \big\{ f \in \mathcal{H}(\delta) : \quad \exists c \in Y : \; zf - c \in \mathcal{H}(\delta) \big\}. \tag{3.29}$$

[7] Se puede suponer también que Γ es una unión finita de curvas suaves a trozos; en este caso los conjuntos abiertos Ω_{int}, Ω_{ext} pueden tener más de una componente conexa.

Se puede ver que para $f \in \mathcal{D}(M_z^{\mathbf{T}})$, la constante c es única. Por definición,

$$M_z^{\mathbf{T}} : \mathcal{D}(M_z^{\mathbf{T}}) \to \mathcal{H}(\delta), \qquad (M_z^{\mathbf{T}} f)(z) \stackrel{\text{def}}{=} zf(z) - c,\ f \in \mathcal{D}(M_z^{\mathbf{T}}), \quad (3.30)$$

donde la constante c se define en (3.29).

Definición. Supongamos que $(A, -, C)$ es un sistema de operadores no acotados,

$$A : \mathcal{D}(A) \to A, \qquad C : \mathcal{D}(A) \to Y,$$

donde A es cerrado y C está acotado en la norma de la gráfica de A. Supongamos que $\sigma(A) \subset \operatorname{clos} \Omega_{\text{int}}$. Ponemos[8]

$$V_{A,C}\, x(z) = C(zI - A)^{-1} x, \qquad z \in \Omega_{\text{ext}},\ x \in X.$$

Decimos que el sistema $(A, -, C)$ es *admisible* (con respecto del dominio Ω_{ext}) si

$$\|V_{A,C}\, x\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, Y)} \leq C\|x\|,\ x \in H, \quad (3.31)$$

y *exacto con respecto del dominio* Ω_{ext} si se tiene una estimación por los dos lados:

$$\|V_{A,C}\, x\|_{E^2(\Omega_{\text{ext}}, Y)} \asymp \|x\|,\ x \in H. \quad (3.32)$$

Teorema 3.1 (Modelo funcional observación, ver [Y23], Teorema 3.1)**.** *Sea $(A, -, C)$ un sistema exacto. Supongamos que $\sigma(A) \subset \operatorname{clos} \Omega_{\text{int}}$. Entonces existe un espacio auxiliar de Hilbert U y una función $\delta \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{L}(Y, U))$ $*$-admisible tales que*

$$V_{A,C} : X \to \mathcal{H}(\delta)$$

es un isomorfismo lineal que satisface la relación $V_{A,C}\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(M_z^{\mathbf{T}})$ y convierte a A en el operador diagonal truncado $M_z^{\mathbf{T}}$ en $\mathcal{H}(\delta)$:

$$V_{A,C}\, A\, V_{A,C}^{-1} f = M_z^{\mathbf{T}} f, \qquad f \in \mathcal{D}\big(M_z^{\mathbf{T}}\big).$$

Si $V_{A,C}$ efectúa el isomorfismo entre el operador A y el operador modelo $M_z^{\mathbf{T}}$ en el espacio $\mathcal{H}(\delta)$, diremos que *la función δ es una función característica generalizada de A (o del sistema $(A, -, C)$).*

Como veremos en la siguiente sección, este modelo funcional es análogo al modelo original de Nagy y Foiaş. Nos referimos a recientes trabajos de Tikhonov [113] y Putinar y Sundberg [95], donde se estudian modelos relacionados desde otros puntos de vista.

[8] Se puede ver que esta fórmula es una modificación de la fórmula general (2.24).

3.2. La equivalencia entre el modelo diagonal truncado en el espacio $\mathcal{H}(\delta)$ y el modelo cociente

Dados unos espacios de Hilbert U, Y, unos dominios $\Omega_{\rm int}$, $\Omega_{\rm ext}$ cualesquiera que satisfacen las hipótesis anteriores y una función δ $*$-admisible de la clase $H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{B}(Y,U))$, podemos considerar en operador $M_z^{\mathbf{T}}$ en el espacio modelo $\mathcal{H}(\delta)$. Si suponemos además que δ es doblemente admisible, entonces se puede demostrar lo siguiente: *existe un isomorfismo*

$$S_\delta : E^2(\Omega_{\rm int}, Y)/\delta \cdot E^2(\Omega_{\rm int}, U) \to \mathcal{H}(\delta) \tag{3.33}$$

que convierte el operador diagonal truncado, $M_z^{\mathbf{T}}$, en el espacio modelo $\mathcal{H}(\delta)$, en el operador diagonal cociente, en el espacio cociente[9] $E^2(\Omega_{\rm int}, Y)/\delta \cdot E^2(\Omega_{\rm int}, U)$.

Ver Proposición 4.1 en [Y23]. Es inmediato que el último operador no cambia, si cambiamos δ por su parte interna (en este caso, tanto δ como $\delta^*(\bar z)$ son internas). Al comparar el último espacio cociente con el espacio cociente (1.8), vemos que el operador $M_z^{\mathbf{T}}$ en $\mathcal{H}(\delta)$ es una generalización directa del modelo de Nagy–Foiaş, donde el dominio $\Omega_{\rm int}$ juega el papel del disco $\mathbb{D}$.

Todas las técnicas y todos los resultados que se aplican al modelo original de Nagy y Foiaş[10] se aplican también a la variante que introducimos nosotros.

Las diferencias entre el modelo original y el del Teorema 3.1 son las siguientes:

1) En vez de un disco (o un semiplano), construimos el modelo en un dominio $\Omega_{\rm int}$ bastante arbitrario.

2) Nuestro modelo de A es respecto a la semejanza y no respecto a la equivalencia unitaria, como era en el caso del modelo original.

3) En nuestro planteamiento, un operador A puede tener distintas funciones características generalizadas.

Para toda función $\delta \in H^\infty(\Omega_{\rm int}, \mathcal{B}(Y,U))$ doblemente admisible, se define *su espectro* $\sigma(\delta) \subset \operatorname{clos}\Omega_{\rm int}$. Se tiene que

$$\sigma(\delta) \cap \Omega_{\rm int} = \big\{ z : \delta(z) \quad \text{no es invertible} \big\}.$$

Se demuestra que $\sigma(\delta)$ coincide con el espectro del operador $M_z^{\mathbf{T}}$ en $\mathcal{H}(\delta)$.

[9] Este último operador puede ser no acotado. Se puede definirlo a través de su resolvente: $(M_z^{\mathbf{T}} - \lambda)^{-1}[f] = [(z-\lambda)^{-1} f]$, $f \in E^2(\Omega_{\rm int}, Y)$, $\lambda \in \Omega_{\rm ext}$, donde $[f]$ es la coclase de f.

[10] ver Sección 1.2

3.3. Ejemplos de operadores que admiten el modelo tipo Nagy–Foiaş

Las secciones 6, 8, 9, 10 del trabajo [Y23] contienen los siguientes ejemplos de la aplicación de este modelo.

1) Si A es un operador contractivo que satisface $A^{*n}x \to 0$, $n \to \infty$ para todo $x \in X$, entonces poniendo $C = (I - A^*A)^{1/2} = D_A$ y $\Omega_{\text{int}} = \mathbb{D}$, se obtiene lo siguiente:

a) El sistema (A, C) es exacto;

b) Al aplicar el Teorema 3.1 a este sistema, se obtiene su modelo Nagy–Foiaş original. La función característica de Nagy y Foiaş es una de las funciones características generalizadas de A en nuestro sentido.

2) Se tienen afirmaciones análogas para operadores disipativos. En este caso, hay que poner $C \overset{\text{def}}{=} (2 \operatorname{Im} A)^{1/2}$ y escoger el semiplano superior como el dominio Ω_{int}.

3) Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un c_0–grupo de operadores, es decir, una familia de operadores en X que depende contínuamente del parámetro real t (respecto a la topología fuerte en el espacio de operadores) y tiene las propiedades $T(0) = I$, $T(t)T(s) = T(t+s)$, $t, s \in \mathbb{R}$. Sea A su generador infinitesimal [54], entonces se obtiene el modelo tipo Nagy–Foiaş al poner $C = I$ y tomando como Ω_{int} una banda vertical adecuada.

4) Sea A el siguiente operador de diferenciación en un intervalo $[0, L]$ con las condiciones de contorno no disipativas:

$$A\varphi = -\varphi', \quad \mathcal{D}(A) \overset{\text{def}}{=} \Big\{\varphi \in W^{1,2}\big([0,L], \mathbb{C}^n\big) : \ \varphi(0) - \int_{\mathbb{R}} d\beta(x)\varphi(x) = 0\Big\}, \tag{3.34}$$

donde $W^{1,2}\big([0,L], \mathbb{C}^n\big)$ es la clase vectorial de Sobolev de funciones cuya primera derivada está en L^2 y β es una medida compleja matricial arbitraria $n \times n$ en el intervalo $[0, L]$ tal que $\beta(\{0\}) = 0$. En este caso, el modelo se obtiene al considerar el operador

$$C\varphi = \varphi(0), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(A); \tag{3.35}$$

se demuestra que el sistema $(A, -, C)$ es exacto para este C.

En [Y23] generalizamos este ejemplo a otros operadores diferenciales.

5) Se obtienen también modelos de este tipo de generadores de semigrupos, relacionados con sistemas lineales con retardo, ver Lunel–Yakubovich

[Y15] y Yakubovich [Y23]. Hablaremos sobre estos modelos en §4.2.

3.4. La relación entre modelos funcionales tipo Nagy–Foiaş y la Teoría lineal de control

Consideremos el caso especial, cuando el operador A es el generador de un c_0–semigrupo $\{T(t)\}$ de operadores lineales en X. A todo sistema (A, B, C) de operadores (ver §2.3) le asociamos *el sistema lineal*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.36}$$

$$y(t) = Cx(t). \tag{3.37}$$

Interpretamos $u(t) \in U$ como *la salida* y $y(t) \in Y$ como *la entrada* del sistema. El espacio X se llama *el espacio de estados*. Suponemos, como antes, que espacios X, U, Y son de Hilbert. Fijando un punto $\lambda_0 \notin \sigma(A)$, definimos formalmente el espacio de Hilbert $X_{-1}(A) = (A - \lambda_0 I)X$, dotado de la norma $\|(A - \lambda_0 I)x\|_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_X$. Este espacio $X_{-1}(A)$ es más grande que X y contiene a X como una subvariedad lineal densa. Imponemos ahora las siguientes condiciones sobre A, B, C: supongamos que B es un operador acotado de U a $X_{-1}(A)$ (es lo mismo que decir que $(A - \lambda_0)^{-1}B$ está acotado de U a X). Vamos a suponer también que C está acotado de $\mathcal{D}(A)$ a Y, donde $\mathcal{D}(A)$ está dotado de la norma de la gráfica. La solución de la ecuación (3.36), con el dato inicial $x(t_0) = a$, se define formalmente como

$$x(t) = a + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\, Bu(s)\, ds, \qquad t \geq t_0. \tag{3.38}$$

La Teoría lineal de control del sistema (3.36)–(3.37) con tiempo continuo está relacionada con el modelo tipo Nagy–Foiaş de la sección anterior para el caso en el que

$$\Gamma = \{z : \operatorname{Re} z = \alpha\}, \quad \Omega_{\text{int}} = \{z : \operatorname{Re} z < \alpha\}, \quad \Omega_{\text{ext}} = \{z : \operatorname{Re} z > \alpha\}, \tag{3.39}$$

donde α es algún número real. Vamos a suponer que $\sigma(A) \subset \operatorname{clos} \Omega_{\text{int}}$. Sin perder la generalidad, pondemos aquí

$$\alpha = 0.$$

Consideremos las entradas $u : (-\infty, 0] \to U$ suaves y con soporte compacto. Introducimos el mapa **entrada–estado**

$$u \in L^2(\mathbb{R}_-, U) \mapsto \mathcal{C}_{A,B} u \stackrel{\text{def}}{=} x(0) \in X. \tag{3.40}$$

Supondremos siempre que el sistema de control (3.36) es *admisible*, es decir, que para alguna constante $c_1 > 0$ se tiene la desigualdad

$$\|\mathcal{C}_{A,B}u\|_X \leq c_1 \cdot \|u\|_{L^2((-\infty,\,0],\,U)} \tag{3.41}$$

para las funciones u de esta clase. Entonces podemos definir el operador entrada–estado (3.40) sobre todo el espacio $L^2\big((-\infty,\,0],U\big)$.

El operador de control B se llama *exacto* (en tiempo infinito) si además de (3.41), se tiene la desigualdad inversa

$$\|\mathcal{C}_{A,B}u\|_X \geq c_2 \cdot \|u\|_{L^2((-\infty,\,0],U)}, \qquad u \in L^2\big((-\infty,\,0]\big) \tag{3.42}$$

para alguna constante $c_2 > 0$.

De forma dual, introducimos el mapa **estado–salida**

$$a = x(0) \in X \mapsto \mathcal{O}_{A,\,C}\, a \stackrel{\text{def}}{=} y|[0,+\infty) \in L^2(\mathbb{R}_+, Y) \tag{3.43}$$

(suponiendo que $u \equiv 0$ en $[0,+\infty)$ en (3.36)). El operador de observación C se llama *exacto* si $\mathcal{O}_{A,C}$ es continuo y además, existe una constante positiva c tal que

$$\|\mathcal{O}_{A,C}a\|_{L^2([0,+\infty))} \geq c\|a\|, \qquad a \in X. \tag{3.44}$$

En la teoría de sistemas lineales bien planteados, se introducen definiciones similares, ver [111]. Los sistemas bien planteados pueden tener operadores B, C no acotados, pero se exije que los mapas $\mathcal{C}_{A,\,B}$ y $\mathcal{O}_{A,\,C}$ sean continuos. Todas estas nociones son muy relevantes en la Teoría de sistemas lineales con parámetros distribuidos, en particular, en relación con el problema lineal cuadrático [111], [61]. Los operadores B y C no continuos en la norma de X aparecen en sistemas con operadores de control y observación sobre la frontera.

Denotamos por $\mathcal{L}$ la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}u(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tz}u(t)\,dt \tag{3.45}$$

La relación entre el modelo tipo Nagy–Foiaş y la Teoría de sistemas lineales se basa en la siguiente simple fórmula

$$V_{A,C}x(z) = \big(\mathcal{L}\mathcal{O}_{A,C}x\big)(z), \quad x \in X,\, z \in \Omega_{\text{ext}}.$$

Tomando en cuenta que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}$ es un isomorfismo isométrico de $L^2\big([0,+\infty),U\big)$ sobre $E^2(\Omega_{\text{ext}},U)$, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *1) El operador C es un operador exacto de observación si y sólo si el sistema $(A, -, C)$ es exacto respecto del semiplano $\Omega_{\text{ext}} = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ en el sentido de la relación* (3.32).

2) C es un operador de observación exacto si y sólo si existe una función $*$-admisible δ tal que la aplicación

$$a \mapsto \mathcal{L}\,\mathcal{O}_{A,C}\,a$$

es un isomorfismo del espacio de estados X al espacio modelo $\mathcal{H}(\delta, \{z : \operatorname{Re} z < 0\})$, que fue definido en la fórmula (3.28).

En el caso de un $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario se tienen afirmaciones análogas, donde en vez de espacios L^2 figuran espacios L^2 con el peso $e^{t\alpha}$.

3.5. Dualidad de modelos y el cálculo explícito de funciones características generalizadas. La relación con la función de transferencia.

Nos restringimos al caso en el que Ω_{int}, Ω_{ext} se eligen según (3.39) para $\alpha = 0$. Las afirmaciones generales de la Sección 2.3 sobre la dualidad de modelos se aplican también al modelo tipo Nagy–Foiaş.

En nuestro caso, de hecho, si C es un operador de observación exacto, entonces, según la Proposición 3.2, la consideración del sistema de observación

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = a, \quad y(t) = Cx(t) \tag{3.46}$$

da lugar al modelo truncado diagonal de A en el espacio $\mathcal{H}(\delta)$.

La consideración del sistema de control (3.36) permite obtener otro modelo de A, que es su modelo cociente, posiblemente, con otra función característica generalizada. Lo llamaremos *el modelo control de A*. Este modelo se obtiene de la siguiente forma. Para un sistema de control (3.36) admisible, introducimos la transformada

$$W_{A,\,B} : E^2(\Omega_{\text{int}}, U) \to X$$

poniendo

$$W_{A,\,B} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{C}_{A,\,B}.$$

Aplicando el Teorema de Beurling–Lax–Halmos, puede verse que

$$\ker W_{A,\,B} = \delta_1 E^2(\Omega_{\text{int}}, Y) \tag{3.47}$$

donde $\delta_1 \in H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{B}(Y,U))$ es una función admisible. Llamaremos a δ_1 *la función característica generalizada del sistema de control* $(A, B, -)$. Definimos el operador cociente $\widehat{W}_{A,B} : E^2(\Omega_{\text{int}}, U)/\delta_1 E^2(\Omega_{\text{int}}, Y) \to X$:

$$\widehat{W}_{A,B}\big(f + \delta_1 E^2(\Omega_{\text{int}}, Y)\big) \stackrel{\text{def}}{=} W_{A,B} f.$$

Teorema 3.3 (modelo control)**.** *Sea (A, B) un sistema exactamente controlable. Definimos la función δ_1 por la fórmula (3.47). Entonces la transformada $\widehat{W}_{A,B}$ es un isomorfismo que convierte el operador A en el operador diagonal cociente en el espacio*

$$E^2(\Omega_{\text{int}}, U)/\delta_1 E^2(\Omega_{\text{int}}, Y).$$

Una pregunta que podemos plantearnos es cuáles son las condiciones para que los sistemas $(A, B, -)$ y $(A, -, C)$ produzcan el mismo modelo funcional. En relación con esto, podemos dar la siguiente definición.

Definición. Sea δ una función doblemente admisible de clase $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{B}(Y,U))$. Decimos que el sistema de observación $(A, -, C)$ y el sistema de control $(A, B, -)$ *son duales respecto de* δ si δ es una función característica generalizada tanto de $(A, B, -)$ como de $(A, -, C)$, y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "V_{A,C}"] & \\
E^2(\Omega_{\text{int}}, U)/\delta E^2(\Omega_{\text{int}}, Y) \arrow[ur, "\widehat{W}_{A,B}"] \arrow[rr, "S_\delta"'] & & \mathcal{H}(\delta)
\end{tikzcd}$$

conmuta (la flecha de abajo es el isomorfismo (3.33) del espacio modelo cociente al espacio modelo $\mathcal{H}(\delta)$).

Necesitamos también definir *la función de transferencia $\Phi_{A,B,C}$ del sistema* (A, B, C). En el caso de operadores A, B, C acotados, la definición es la clásica que se da en la Teoría de Control:

$$\Phi_{A,B,C}(z) = C(zI - A)^{-1}B.$$

Si el operador A es no acotado, para que esta fórmula tenga sentido tiene que ser modificada, ver [111, Y23].

Definimos también *la función de transferencia* Φ *que corresponde a una función característica generalizada* δ. La condición principal que tiene que cumplir Φ es la siguiente:

$$\Phi = \delta^{-1} + \tau$$

para una función analítica $\tau : \Omega_{\text{int}} \to \mathcal{B}(U, Y)$ de una cierta clase. Nos referimos a [Y23] para la definición exacta.

Obsérvese que la función de transferencia $\Phi_{A,B,C}$ va del espacio de entradas U al espacio de salidas Y, mientras que la función característica δ va de Y a U. En el típico ejemplo, en el que A tiene resolvente compacta, la función δ tiene ceros en el espectro de A (es decir, $\ker \delta(z) \neq 0 \Leftrightarrow z \in \sigma(A)$), mientras que la función $\Phi_{A,\,B,\,C}$ tiene polos en los puntos del espectro de A.

La idea de modelos duales conduce al siguiente resultado, que es uno de nuestros principales resultados sobre los modelos tipo Nagy–Foiaş.

Teorema 3.4 (ver [Y23], Teorema 9.5)**.** *Supongamos que los sistemas* $(A, B, -)$ *y* $(A, -, C)$ *son admisibles, la transformada* $V_{A,\,C}$ *tiene núcleo trivial, la transformada* $W_{A,\,B}$ *tiene imagen densa y existe una función* δ *doblemente admisible de clase* $H^\infty(\Omega_{\text{int}}, \mathcal{B}(Y, U))$ *tal que la función de transferencia* Φ *que corresponde a* δ *coincide con la función de transferencia del sistema* (A, B, C).

Entonces se tiene lo siguiente.

1) Los sistemas $(A, B, -)$ *y* $(A, -, C)$ *son exactos y son duales con respecto de* δ.

2) La transformada $V_{A,\,C}$ *es un isomorfismo de* X *sobre* $\mathcal{H}(\delta)$*, que transforma* A *en el operador diagonal truncado* $M_z^{\mathbf{T}}$.

3) La transformada $\widehat{W}_{A,\,B}$ *es un isomorfismo de* $E_-^2(U)\big/\delta E_-^2(Y)$ *sobre* X*. Esta transformada convierte el operador* A *en el operador diagonal cociente* $\widehat{M}_z$ *en el espacio cociente* $E_-^2(U)/\delta E_-^2(Y)$.

Las hipótesis de este teorema y de sus análogos pueden ser verificadas en ejemplos. Gracias a estos resultados, para cada uno de los operadores mencionados en los ejemplos de §3.3 hemos podido dar fórmulas explícitas para un operador exacto de observación, un operador exacto de control y para una de las correspondientes funciones características generalizadas. Es decir, escribimos un modelo funcional explícito para cada una de estas clases de operadores.

3.6. Discusión

En la teoría de Nagy y Foiaş, se construye un único modelo de un operador, que es un operador unitariamente equivalente al operador inicial. Según nuestro planteamiento, el modelo de un operador no es único.

Supongamos que el dominio Ω_{int} es fijo. Podríamos permitir sólo funciones características doblemente internas en Ω_{int}, en vez de considerar todas las funciones doblemente admisibles. Entonces estaría restaurada la unicidad del modelo tanto para un sistema de observación como para un sistema de control, pero no podríamos dar fórmulas explícitas de funciones características.

Nuestro método permite hallar una función característica generalizada, que no es interna, mientras que las fórmulas para funciones características internas muchas veces no existen. Por tanto, el método propuesto extiende de forma considerable el rango de posibles aplicaciones del modelo de Nagy y Foiaş.

3.7. La relación con la teoría de espacios de funciones analíticas

Como se sigue de la discusión anterior, nuestro método de la construcción de modelos tiene mucha relación con el estudio de espacios de Hilbert de funciones analíticas en un dominio en el plano complejo.

La relación entre una clase determinada de operadores y espacios de Hilbert de funciones analíticas fue investigada en el artículo de Cowen y Douglas (ver [32]), donde ellos establecieron un invariante geométrica de operadores de esta clase, que tiene el significado de curvatura.

Últimamente diversos espacios de funciones analíticas (espacios de Bergman, de Dirichlet, de Fock, etc.) están siendo investigados intensamente.

En los artículos de Hedenmalm en Acta Mathematica (ver [50]), Aleman, Richter y Sundberg (ver [7]) y otros se hicieron unos avances muy grandes en el problema de descripción de los subespacios invariantes por el operador diagonal M_z en el espacio de Bergman en el disco. La descripción de subespacios invariantes por M_z en el espacio de Dirichlet fue encontrada en el trabajo [100] de Richter. Posteriormente los operadores relacionados con el operador shift de Dirichlet fueron estudiados en otros trabajos, ver, por ejemplo, la serie [2] de tres trabajos de Agler y Stankus. Estos trabajos se inspiraron también en el elegante trabajo anterior [53] de Helton, que trata el caso relacionado con el eje real y no con el disco unidad. En el libro [51] de Hedenmalm, Korenblum y Zhu uno puede encontrar la exposición sistemática de resultados recientes sobre los espacios de Bergman. Los últimos avances en esta área de investigación se deben a trabajos de Shimorin (ver [107, 108]), Olofsson (ver [86]) y otros.

Algunos de los trabajos del autor están relacionados con esta corriente. Por ejemplo, en [Y6], basándonos en los trabajos anteriores de Hitt (ver citeHitt), describimos los subespacios invariantes por M_z en espacios E^p, asociados a dominios múltiplemente conexos. En el trabajo conjunto [Y20] con J. M. Rodríguez, demostramos un análogo del Teorema de Kolmogorov–Szegö–Krein para el espacio de Sobolev $W^{n,p}(\mu)$, asociado a una sucesión $\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\mu_0, \dots, \mu_n)$ de medidas positivas en la cirunferencia unidad $\mathbb{T}$. Para el caso en el que todas las medidas son absolutamente continuas: $d\mu_j = w_j|dz|$, $0 \le j \le n$, y los pesos w_j son funciones monótonas a trozos en $\mathbb{T}$, demostramos que la condición

$$\int_{\mathbb{T}} \log(w_0 + \cdots + w_n) = -\infty$$

es necesaria y suficiente para que los polinomios analíticos sean densos en $W^{n,p}(\mu)$. Nos referimos a [Y20] para la definición de la clase $W^{n,p}(\mu)$. Este trabajo está directamente relacionado con el shift de Dirichlet.

Destacamos que en la Sección 3.5 hemos utilizado la descripción de los subespacios invariantes por M_z en los espacios vectoriales de Hardy (el Teorema de Beuring–Lax–Halmos) en la definición de la función característica.

4. Aplicaciones

4.1. La aplicación de la teoría espectral de operadores subnormales a los dominios de cuadraturas

Supongamos que Ω es un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y que existen puntos z_k en Ω y constantes c_{jk} tales que

$$\iint_\Omega f\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{r_k-1} c_{j\,k} f^{(j)}(z_k)$$

para toda función analítica f en $L^1(\Omega)$. Entonces al dominio Ω se llama *dominio de cuadraturas*.

Los dominios de cuadraturas tienen muchas propiedades intrigantes. Están relacionados con diversas áreas de la matemática, tales como la geometría algebráica, teoría del potencial, el problema de momentos en el plano (ver [45]), dinámica de fluídos y problemas extremales para funciones univalentes. Nos referimos al libro reciente [41] para más información.

Los dominios de cuadraturas están relacionados también con operadores subnormales de tipo finito, que hemos definido en §2.7. Esta relación es muy simple: el operador diagonal M_z en el espacio de Smirnov con peso $E^2(\Omega, \rho)$, donde $0 < c_1 < \rho(z) < c_2 < \infty$, $z \in \partial\Omega$, es un operador subnormal de tipo finito si y sólo si Ω es un dominio de cuadraturas.

Aharonov y Shapiro en un trabajo pionero, ver [9], demuestran que un dominio Ω simplemente conexo es un dominio de cuadraturas si y sólo si es imagen del disco unidad $\mathbb{D}$ por una función racional f de clase H^∞, que es univalente en $\mathbb{D}$. En [75], utilizando el modelo de operadores subnormales, construido por D. Xia y el autor (ver [119, Y22]), demostramos una generalización de este resultado a dominios de conectividad n arbitraria. En vez de funciones racionales f, esta caracterización utiliza funciones racionales matriciales F de orden $n \times n$, que son analíticas en $\operatorname{clos}\mathbb{D}$ y cuyos valores $F(\zeta)$ para $\zeta \in \mathbb{T}$ son matrices normales. El conjunto de autovalores de la matriz $F(e^{it})$ tiene que trazar toda la frontera de Ω cuando t recorre el intervalo $[0, 2\pi]$.

Si Ω no es simplemente conexo, existe una familia de operadores subnormales no equivalentes relacionada con Ω.

Putinar y Gustaffson, en una serie de artículos (ver [46, 94] y otros), relacionan las propiedades de un dominio de cuadraturas Ω con las propiedades de un cierto operador hiponormal T con autoconmutador de rango 1, que se determina de manera única. El modelo analítico de Pincus, D. Xia y J. Xia, que aparece en [91], representa a este operador como operador de multiplicación por la variable independiente en un espacio de funciones analíticas en Ω.

En [Y18], hallamos una nueva norma en este espacio y demostramos que el operador T se obtiene a partir de un operador subnormal de tipo finito, haciendo perturbaciones finito dimensionales del espacio de Hilbert donde actúa T y de la norma en este espacio.

4.2. La aplicación del modelo tipo Nagy y Foiaş a la Teoría lineal de control

Como ya hemos comentado en §§ 3.3–3.4, existe una fuerte relación entre el formalismo de la Teoría lineal de control y nuestra construcción de modelos funcionales. Cabe destacar que la teoría clásica de Kalman de sistemas lineales finito dimensionales es invariante respecto de la semejanza y no sólo la equivalencia unitaria. Todo esto conduce a la idea de aplicar nuestros resultados a sistemas con parámetros distribuidos, que son infinito dimensionales.

La investigación del control de sistemas distrubuidos ya data de varias décadas, y la bibliografía sobre el tema es enorme. El review de Zuazua [123] y los libros de Lasiecka y Triggiani [61] sintetizan el acercamiento basado en un uso profundo de los métodos de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Los temarios de los libros de Curtain y Zwart [33], Avdonin–Ivanov [15] y del reciente libro de Staffans [112], al parecer, son los que permiten aplicar las técnicas de modelos funcionales con más facilidad.

A continuación exponemos nuestros primeros resultados en esta dirección.

Controlabilidad en tiempo finito de sistemas lineales con retardo y neutros

Para sistemas dinámicos que incluyen circuítos de retroalimentación, los retardos temporales aparecen en estos circuítos de forma natural debido a los efectos de comunicación, transmisión, transportación o bien por los efectos de inercia. Uno de los acercamientos a sistemas neutros consiste en considerar una dinámica equivalente en un espacio de Hilbert infinito dimensional.

Utilizaremos la notación $L^2_n([-h,0]) \overset{\text{def}}{=} L^2([-h,0],\mathbb{C}^n)$ y parecidas para denotar las clases de funciones con valores vectoriales.

Consideremos el sistema

$$\frac{d}{dt} M x_t = L x_t + v(t), \qquad t \geq 0, \tag{4.48}$$

$$v(t) = (\rho * u)(t), \tag{4.49}$$

$$(Mx)(0+) = c, \ x(\theta) = \varphi(\theta), \quad -h \leq \theta < 0. \tag{4.50}$$

llamado *sistema neutro lineal*. Aquí $x \in L^2_{\mathrm{loc},n}\big([-h,\infty)\big)$ es la función vectorial incógnita, $h > 0$ es el máximo retardo, y x_t es la función en $L^2_n\big([-h,\, 0]\big)$, definida de la siguiente forma:

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \qquad -h \leq \theta \leq 0.$$

Suponemos que ρ es una medida matricial en $[0,h]$ de orden $n \times m$; el signo $*$ denota la convolución. La función u tiene el significado del control. Los operadores lineares $M, L : L^2_n\big([-h,\, 0]\big) \to \mathbb{C}^n$ se definen por las fórmulas

$$M\varphi = \int_0^h d\mu(\theta)\varphi(-\theta),$$

$$L\varphi = \int_0^h \zeta(\theta)\varphi(-\theta)\, d\theta + \int_0^h \eta(\theta)\dot{\varphi}(-\theta)\, d\theta,$$

donde $\zeta, \eta \in L^2[0,h]_{n\times n}$ y μ es una medida matricial $n \times n$ con soporte en $[-h, 0]$. Asumiremos siempre la siguiente hipótesis

($*$) La medida μ es no singular en $t = 0$, es decir, $\det \mu\big(\{0\}\big) \neq 0$.

El siguiente sistema es un ejemplo particular de (4.48):

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} M_j x(t-h_j) = \sum_{j=0}^{N} L_j x(t-h_j) + v(t), \qquad t \geq 0.$$

Aquí $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_N = h$ son números reales y M_j, L_j son matrices complejas de tamaño $n \times n$. En este ejemplo, $\mu\big(\{0\}\big) = M_0$.

Una clase particular de sistemas neutros son los *sistemas con retardo*, que corresponden al caso en el que la parte izquierda de (4.48) es $\dfrac{dx(t)}{dt}$, es decir, cuando $M\varphi = \varphi(0)$.

Existe una literatura muy numerosa, tanto científica como más técnica, dedicada a diferentes aspectos de sistemas neutros, sistemas con retardo y su teoría espectral. Podemos mencionar, por ejemplo, los libros [102, 48], que contienen muchas referencias sobre el tema. Son unos ejemplos simples e importantes cuando el operador de solución no es autoadjunto, cuyo estudio, por lo tanto, depende del desarrollo de la teoría espectral de esta clase de operadores. Como el semigrupo, por lo general, no es contractivo, la teoría original de Nagy y Foiaş no se aplica.

La condición $(*)$ implica que cualquier función v en $[0,+\infty)$, que está localmente en L^2, produce una única solución x que está localmente en la clase de Sobolev $W^{2,1}$.

Definición. Decimos que el sistema (4.48)–(4.50) es *exactamente controlable* en un intervalo temporal $[0,T]$ si para toda función ψ en $W_n^{2,1}([T,T+h])$ existe un control $u \in L_m^2([0,T])$ tal que la solución $x(t)$ satisface $x(t) = \psi(t)$, $T \le t \le T+h$. Denotaremos por T_{inf} el ínfimo de los tiempos de controlabilidad exacta.

Podemos mencionar los trabajos [88, 102, 72] y el review [65] como unas referencias básicas acerca de la controlabilidad aproximada y la controlabilidad exacta para sistemas neutros. Queremos subrayar que existen definiciones no equivalentes de la controlabilidad exacta en tiempo finito, ver [56], [73], [88] y otros.

Sea $X = \mathbb{C}^n \times L_n^2([-h,\,0])$ el espacio de Hilbert de todos los posibles datos iniciales; este espacio juega el papel del espacio de estados del sistema neutro.

Supongamos, por el momento, que la entrada v es nula.

El semigrupo solución $S(t)$, $t \ge 0$ de nuestro sistema neutro actúa en el espacio de estados X según la fórmula

$$S(t)\begin{pmatrix} c \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\,x_t(c,\varphi) \\ x_t(c,\varphi) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c \\ \varphi \end{pmatrix} \in X.$$

La familia $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ es un c_0-semigrupo, cuyo generador infinitesimal A tiene la forma

$$A\begin{pmatrix} c \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}(A) \overset{\text{def}}{=} \Big\{ \begin{pmatrix} c \\ \varphi \end{pmatrix} \in X : \varphi \in W^{2,1},\ c = M\varphi \Big\}.$$

En la teoría de sistemas lineales neutros, por *la función característica* del sistema (4.48) suele entenderse la función entera de tamaño $n\times n$, definida por la fórmula

$$\Delta(z)\,c = zM(e^{zt}c) - L(e^{zt}c), \qquad c \in \mathbb{C}^n.$$

Se conoce que en general, el espectro de A es igual a su espectro puntual y se halla a partir de la fórmula:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det \Delta(\lambda) = 0\}.$$

Existe un número real a para el que se tiene la estimación $\|\Delta(z)\| \leq C(1 + |z|)^{-1}$, $\operatorname{Re} z > a$. Fijamos cualquier $b > a$ y ponemos

$$\delta(z) \overset{\text{def}}{=} (z - b)^{-1} e^{hz} \Delta(z), \tag{4.51}$$

$$\Omega_{\text{int}} \overset{\text{def}}{=} \{z : \operatorname{Re} z < a\}, \quad H^2_{-,n} \overset{\text{def}}{=} H^2(\Omega_{\text{int}}, \mathbb{C}^n).$$

Operadores de multiplicación

$$M_{e^{zt}} u(z) = e^{zt} u(z), \qquad t \geq 0$$

forman un c_0-semigrupo de operadores en $H^2_{-,n}$.

Teorema 4.1 ([Y15]). *Supongamos que se cumple* $(*)$. *Entonces existe un isomorfismo*

$$U : X \to H^2_{-,n} / \delta H^2_{-,n}$$

tal que $UT(t) = \widehat{M}_{e^{zt}} U$, $\quad t \geq 0$. *Aquí* $\widehat{M}_{e^{zt}} : H^2_{-,n}/\delta H^2_{-,n} \to H^2_{-,n}/\delta H^2_{-,n}$ *denota operadores cociente de operadores de multiplicación* $M_{e^{zt}}$ *en* $H^2_{-,n}$ *por su subespacio invariante común* $\delta H^2_{-,n}$.

De esta forma, los operadores $\{\widehat{M}_{e^{zt}}\}_{t \geq 0}$ en el espacio cociente $H^2_{-,n}/\delta H^2_{-,n}$ modelan el semigrupo de evolución $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ del sistema (4.48)–(4.50). El Teorema 4.1 es un caso particular de la construcción del Capítulo 3.

Ponemos

$$F(z) = e^{hz} \mathcal{L}\rho(z), \qquad \Phi(z) = \big(\delta(z),\, F(z)\big),$$

donde $\mathcal{L}$ es la transformada de Laplace (3.45); entonces $\Phi \in H^\infty_{n \times m}(\Omega_{\text{int}})$.

En los trabajos conjuntos con Verduyn Lunel [P7]–[P9], hemos aplicado este teorema al estudio de la controlabilidad exacta del sistema neutro (4.48)–(4.50) en tiempo finito. Demostramos los siguientes resultados.

Teorema 4.2. *La controlabilidad exacta en tiempo finito del sistema (4.48)–(4.50) es equivalente a la siguiente propiedad*

$(**)$ *existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\sum_{\eta} |\det \Phi_\eta(z)|^2 > \varepsilon$$

para todo z con $\operatorname{Re} z < a$. Aquí se hace la sumación sobre todas las submatrices de orden $n \times n$ de la matriz $\Phi(z)$, es decir, sobre todos los subconjuntos $\eta \subset \{1, 2, \ldots, n+m\}$ que formados por n elementos.

Si se satisface $(**)$, entonces $\frac{n}{m}h \leq T_{inf} \leq nh$.

Teorema 4.3. *Supongamos que (4.48)–(4.50) es un sistema con retardo y se cumple $(**)$. Entonces $T_{inf} \leq h$.*

En particular, estos teoremas implican que para un sistema con retardo que satisface $(**)$, se tiene $T_{inf} = h$ si $\dim u = \dim x$.

4.3. Esbozo de las ideas de las pruebas de los Teoremas 4.2 y 4.3

Las líneas principales de razonamiento son las siguientes.

1) Sea $T > 0$. Consideramos la clase funcional de Paley–Wiener $\mathrm{PW}_m([-T,\, 0]) = \mathcal{L}L^2_m([-T,\, 0])$. Demostramos que la controlabilidad exacta del sistema (4.48)–(4.50) en $[0, T]$ es equivalente a la igualdad

$$\delta \cdot H^2_{-,n} + F \cdot \mathrm{PW}_m([-T,\, 0]) = H^2_{-,n}.$$

En particular, es necesario que se cumpla la ecuación

$$\delta \cdot H^2_{-,n} + F \cdot H^2_{-,m} = H^2_{-,n} \tag{4.52}$$

llamada: la ecuación vectorial de Bezout (ver [84]).

2) Completamos la matriz $\Phi(z)$ de orden $n \times (n+m)$ hasta una matriz cuadrada de clase $H^\infty_{(n+m)\times(n+m)}(\Omega_{\mathrm{int}})$ con determinante idénticamente igual a 1:

$$\det \begin{pmatrix} \delta & F \\ W_1 & W_2 \end{pmatrix} \equiv 1, \qquad \operatorname{Re} z < a.$$

Siempre que se cumpla $(*)$, tal complección es posible gracias a un resultado de Tolokonnikov en [115]. Ponemos

$$\begin{pmatrix} \delta & F \\ W_1 & W_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix},$$

donde K, L, M, N son funciones matriciales de clase H^∞ de tamaños correspondientes. Se tiene la identidad

$$\det \delta(z) = \det N(z), \qquad \operatorname{Re} z < a. \tag{4.53}$$

3) Definimos el operador vectorial de Toeplitz $T_N : H^2_{-,m} \to H^2_{-,m}$ con el símbolo N, actuando en $H^2_{-,m}$:

$$T_N f = P_-(N \cdot f), \qquad f \in H^2_{-,m},$$

donde $P_- : L^2_m(\partial\Omega_{\text{int}}) \to H^2_{-,m}$ es la proyección ortogonal (N es una funcón matricial de orden $m \times m$). Demostramos la relación:

$$\Big(\text{La controlabilidad exacta de (4.48)–(4.50) en } [0,T]\Big)$$
$$\iff \quad \Big(T_{e^{-zT}N} \ \text{ es sobreyectivo}\Big).$$

El Teorema 4.2 se obtiene a partir de esta equivalencia, aplicando algunas propiedades básicas de operadores semi-Fredholm y la relación

$$\|\delta(z) - e^{hz} I_{n\times n}\| \to 0, \qquad z \to \infty, \tag{4.54}$$

que sólo se cumple para sistemas con retardo.

La demostración del Teorema 4.2 utiliza la siguiente noción, que hemos introducido en [P4]. Sea $g : \partial\Omega_{\text{int}} \to \mathbb{C}$ una función continua que no se anula en $\partial\Omega_{\text{int}} = a + i\mathbb{R}$. Definimos el *número medio de vueltas* $w_1(g)$ *en* $\partial\Omega_{\text{int}}$ *de la función* g como el límite

$$w_1(g) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s^2} \left[\int_0^s - \int_{-s}^0 \right] \arg g(a+iy)\, dy,$$

si este límite existe. Denotamos por $\overline{w}_1(g)$ el límite superior de la misma expresión. Por ejemlo, si $g(z) = e^{\alpha z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $w_1(g) = \alpha$.

La demostración de la estimación $T_{inf} \geq \frac{n}{m} h$ está basada en el siguente resultado.

Teorema 4.4 ([P4])**.** *Para toda función matricial continua N en $\partial\Omega_{\text{int}}$, de orden $m \times m$, tal que* $\det N(z) \neq 0$ *si $z \in \partial\Omega_{\text{int}}$, se verifica*

$$\inf \Big\{ T \in \mathbb{R} : \quad T_{e^{-zT}N} \ \ \textit{es sobreyectivo} \Big\} \geq \frac{\overline{w}_1(\det N)}{m}.$$

Según este teorema y (4.53),

$$T_{\text{inf}} \geq \frac{\overline{w}_1(\det N)}{m} = \frac{\overline{w}_1(\det \delta)}{m} = \frac{nh}{m}.$$

Para obtener la última igualdad, se utiliza la fórmula (4.51) para la función característica δ y el hecho de que $\dfrac{\Delta(z)}{z - b_-}$ es una función externa en $\{z : \operatorname{Re} z > a\}$ para cualquier punto $b_- \in \Omega_{\text{int}}$.

El Teorema 4.4 se ha demostrado en [P4], utilizando la dualidad de Feffermann entre el espacio de Hardy real $H^1_{\mathbb{R}}$ y el espacio BMO($\mathbb{R}$).

5. Las líneas abiertas de investigación

5.1. El desarrollo de la teoría abstracta de modelos analíticos duales

Nos proponemos encontrar enunciados exactos sobre el esquema general de la Sección 2.3 de forma análoga al trabajo [Y21] y estudiar qué relación tiene este esquema con diferentes modelos funcionales existentes, que hemos mencionado en §1.3.

Si este trabajo se lleva a cabo, supondría una cierta uniformización de los métodos de construcción de modelos funcionales y de sus formas.

5.2. Operadores hiponormales con símbolos suaves

Los resultados de [Y12], expuestos en §2.6, no tienen carácter definitivo. No hemos dado una forma expícita del espacio modelo que se obtiene; más aún, no siempre podemos demostrar la completitud del modelo de A^*.

Dadas estas dificultades, nos proponemos obtener modelos funcionales asimétricos de A y A^* en el sentido de §2.4, suponiendo que el operador hiponormal A pertenece a una clase más restringuida.

Cualquier operador hiponormal A se reescribe en su *modelo singular integral*

$$(Af)(x) = (x + ib(x))\, f + ia^*(x)\big(P_-(af)\big)(x),$$

que actúa en la integral directa

$$\mathcal{H} = \int_{[c,\,d]}^{\oplus} E(x)\, dx.$$

Aquí $c, d \in \mathbb{R}$, todos los espacios $E(t)$ están contenidos en un espacio de Hilbert E, $a, b \in L^\infty\big(dt, L(E)\big)$, $b(x) = b^*(x)$, $a(x)|E(x)^\perp = 0$, $b(x)|E(x)^\perp = 0$, y

$$(P_- f)\,(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - (x - i0)}\, dt$$

es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R}, E)$ sobre el espacio de Hardy $H^2(\{\operatorname{Re} z < 0\}, E)$, que es un subespacio de $L^2(\mathbb{R}, E)$. De hecho, esta forma se obtiene al pasar a la representación espectral del operador autoadjunto $\operatorname{Re} A$, ver [74]. Nuestra idea es obtener los modelos duales de A y A^*, suponiendo que las funciones matriciales $a(x)$, $b(x)$ son suaves en un cierto sentido. Tenemos resultados preliminares prometedores, pero todavía nos quedan algunas dificultades técnicas.

Como en otros casos, estos modelos permitirían responder a otras preguntas de carácter espectral, relacionadas con estos operadores, tales como el cálculo de la multiplicidad espectral,[11] la descripción de subespacios invariantes o del conmutante. La multiplicidad espectral $\nu(A)$ entra en la desigualdad de Berger–Show

$$\text{traza}\,\big([A^*, A]\big) \leq \frac{\nu(A)}{\pi}\,\text{Area}(\sigma(A))$$

(ver [74]), que es una de las desigualdades básicas en la Teoría de operadores hiponormales. De momento, hay pocos ejemplos de operadores hiponormales A para los que se sepa cómo calcular su multiplicidad espectral.

5.3. La relación entre operadores subnormales y sistemas conmutativos de operadores no autoadjuntos

Las curvas algebráicas reales aparecen también en la teoría de colecciones conmutativos de operadores no autoadjuntos y sistemas multidimensionales asociados de Livsič–Vinnikov [67].

En un trabajo conjunto con V. Vinnikov encontramos una relación entre esta teoría y la teoría de operadores subnormales de tipo finito. Para establecer esta relación, hemos tenido que introducir una noción más amplia que un operador subnormal y ampliar también la noción de dilatación. El desarrollo de estas ideas nos llevaría a construir análogos del modelo de Nagy y Foias y de Naboko para varios operadores. Una lista de posibles aplicaciones más concretas de esta teoría aparece en [16]. Sería interesante aplicarla también a sistemas de control bilineales.

5.4. Modelos en dominios parabólicos

En el Capítulo 3, basado en el trabajo [Y23] del autor, hemos definido un modelo tipo Nagy–Foiaş en un dominio más o menos arbitrario en el plano

[11] que fue definida en (1.2)

complejo. Sin embargo, en [Y23] sólo damos ejemplos cuando el dominio en cuestión es un disco, un semiplano o una banda.

Sea $A = iA_0 + K$ una perturbación de un operador autoadjunto A_0 no acotado en un espacio de Hilbert X. Suponemos que el operador K está dominado por el operador A_0 en un sentido, que no vamos a precisar aquí. Tanto A_0 como K pueden ser operadores no acotados. Es posible entonces definir un dominio Ω_{int} con fronteras parabólicas (que depende de las condiciones concretas sobre A_0 y K) tal que A posee un modelo tipo Nagy–Foias en Ω_{int}. Se puede intentar aplicar esta idea al estudio espectral del operador A, que en general no es acretivo. Los primeros resultados en esta dirección se encuentran en [P12].

Es muy interesante comparar esta construcción con el trabajo reciente de Putinar y Sundberg [95], donde se construye una dilatación de cualquier operador A acotado en un espacio de Hilbert. La dilatación es un operador semejante a un operador normal; su espectro está contenido en la frontera del rango numérico del operador.

Sería interesante saber si el método de Putinar y Sundberg se aplica a operadores no acotados. A diferencia de su trabajo, nosotros damos una fórmula explícita para una de las funciones características generalizadas. En nuestra construcción el dominio donde construimos el modelo no es necesariamente convexo.

5.5. Criterios de generación de semigrupos

El famoso Teorema de Hille–Phillips–Yosida da una condición necesaria y suficiente para que un operador cerrado, A, en un espacio de Banach X sea un generador de un c_0 semigrupo. A pesar de la importancia de este resultado, no es fácil aplicarlo en ejemplos, porque incluye condiciones sobre todas las potencias naturales de la resolvente de A.

Si suponemos que X es un espacio de Hilbert y que $A = iA_0 + K$ admite un modelo en un dominio parabólico, como se ha descrito en la sección anterior, podemos dar un criterio de generación de c_0 semigrupo mucho más sencillo, que incluye sólo la primera potencia de la resolvente de A.

Igual que el criterio de Hille–Phillips–Yosida, este criterio es también necesario y suficiente. De momento, este trabajo no se ha publicado.

Sería interesante encontrar aplicaciones concretas de este resultado.

5.6. El problema de desplazamiento de polos

Consideremos un sistema con retroalimentación

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Ku(t) \\ u(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

donde el operador principal A del sistema y el operador C de observación son fijos y el operador de control K es un parámetro. Tanto C como K pueden ser no acotados. El sistema cerrado es, al menos formalmente

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t), \quad \text{donde } A_1 = A + KC. \tag{5.55}$$

Se pide describir los posibles espectros $\sigma(A_1)$ del sistema cerrado en términos de operadores A y C.

Nos proponemos estudiar este problema en infinitas dimensiones con la siguiente hipótesis adicional:

$(***)$ El sistema (A, C) es exactamente observable.

La respuesta para sistemas lineales finito dimensionales se da en el conocido Teorema de Rosenbrock, ver [19]: *si el sistema (A, C) es observable, el espectro de A_1 puede ser un subconjunto arbitrario del plano complejo que tiene no más de $\dim X$ puntos.* La hipótesis de observabilidad es muy natural para el caso de dimensión finita: si no se cumple, hay partes del espectro de A que no pueden ser movidas.

Existen ya respuestas satisfactorias a nuestra pregunta para el caso en el que los autovectores de A forman una base de Riesz, ver [121] y otros. En estos artículos no se hace la hipótesis de la observabilidad exacta.

Resulta que se puede definir una clase de operadores K *admisibles*, para las cuales podemos definir bien el sistema cerrado y además, tanto A como A_1 generan semigrupos de tipo Nagy–Foiaş (ver [P6]). No todos los operadores K de esta clase son acotados.

Teorema 5.1. *Supongamos que A genera un c_0-semigrupo de tipo Nagy–Foiaş y que se cumple $(***)$. Supongamos que $\delta \in H^\infty(\mathbb{C}_-, B(Y, U))$ es una función característica generalizada del sistema de observación $(A, -, C)$, y que δ es doblemente admisible. Sea $\delta_1 \in H^\infty(\mathbb{C}_-, B(Y, U))$ otra función doblemente admisible. Si*

$$T_{\delta_1^* \delta} \quad \textit{es un isomorfismo}, \tag{5.56}$$

entonces existe un operador admisible K, que da lugar al correspondiente sistema cerrado (5.55) tal que δ_1 es la función característica generalizada de A_1. En este caso, en particular, $\sigma(A_1) = \sigma(\delta_1)$.

En relación con este resultado, surgen las siguientes preguntas.

1) ¿Es necesaria la condición (5.56) para poder transformar el espectro $\sigma(A) = \sigma(\delta)$ en el espectro de δ_1?

2) Encontrar una versión métrica de este resultado: dar una estimación del "tamaño" de K (en un sentido adecuado) en función de algún tipo de distancia entre los espectros de δ y δ_1.

En esta última tarea, nos proponemos usar la técnica del trabajo [55] en un contexto distinto.

6. Conclusiones

Queremos destacar las siguientes características de nuestro método.

1) El método se aplica a operadores con comportamiento espectral muy distinto. Entre ellos se encuentran:

a) Operadores cuyo espectro es masivo, pero cuyo espectro esencial está contenido en una unión finita de curvas suaves (operadores de Toeplitz, ciertos tipos de operadores hiponormales y subnormales).

b) Operadores con espectro esencial masivo (perturbaciones suaves de operadores normales cuya medida espectral es la medida de Lebesgue dos-dimensional).

c) Operadores, cuyo espectro no tiene puntos interiores, en particular, muchas clases de operadores no acotados no autoadjuntos que provienen de las aplicaciones. En este grupo se encuentran generadores de grupos, generadores de semigrupos relacionados con sistemas lineales con retardo y neutros, y perturbaciones no disipativas de cierto tipo de operadores autoadjuntos.

2) El método consiste en la construcción simultánea de modelos funcionales de un operador A y de su conjugado A^* en espacios funcionales $\mathrm{Mod}(A)$ y $\mathrm{Mod}(A^*)$. Estos espacios dependen, no sólo de A, sino también de operadores auxiliares B y C, que tienen que satisfacer ciertas propiedades, dependiendo del caso. Los espacios $\mathrm{Mod}(A)$ y $\mathrm{Mod}(A^*)$ que se obtienen son duales uno a otro respecto de una "dualidad de Cauchy" natural.

El objetivo es demostrar que A y A^* son semejantes a unos "operadores modelo", respectivamente, en espacios modelo $\mathrm{Mod}(A)$ y $\mathrm{Mod}(A^*)$. Por lo general, los operadores modelo suelen tener las tres siguientes formas muy simples: el operador diagonal M_z, el operador diagonal truncado $M_z^{\mathbf{T}}$ ó bien un operador cociente. Sin embargo, los espacios modelos muchas veces tienen una forma complicada.

La noción de dualidad ayuda a demostrar la semejanza del operador A a su modelo, reduciendo esta demostración a la comprobación de acotación de transformaciones de semejanza y de unas identidades explícitas (ver Proposición 2.2).

3) Existe una formulación abstracta del método, que hemos presentado en §2.3. Este esquema está más desarrollado para casos más concretos.

4) Una vez construidos modelos funcionales duales, se puede obtener muchas veces respuestas bastante completas a las preguntas típicas de la teoría espectral de operadores no autoadjuntos, tales como las descripciones de los cálculos funcionales, los subespacios invariantes por el operador y el conmutante (ver la Introducción).

5) Los modelos que construimos con este procedimiento no son únicos. Sin embargo, la unicidad se consigue para algunas clases particulares de operadores A, si fijamos el procedimiento de cómo asignar operadores auxiliares B y C al operador A.

Por ejemplo, para la clase de contracciones completamente no unitarias, la regla $B = D_{A^*} \overset{\text{def}}{=} (I - AA^*)^{1/2}$, $C = D_A \overset{\text{def}}{=} (I - A^*A)^{1/2}$ nos da el modelo original de Nagy y Foiaş. Para la clase de operadores disipativos, completamente no autoadjuntos, las fórmulas $B \overset{\text{def}}{=} C \overset{\text{def}}{=} (2\operatorname{Im} A)^{1/2}$ permiten obtener el modelo de Nagy y Foiaş de operadores disipativos. Para operadores subnormales, se obtiene el modelo de Xia al poner $B = 0$, $C = (A^*A - AA^*)^{1/2}$. Si A es hiponormal, las mismas fórmulas permiten relacionar el modelo de Martin y Putinar de A con el modelo funcional asimétrico de A en el sentido de §2.4.

Para otras clases de operadores (tales como operadores de Toeplitz), una única regla de este tipo no es posible o al menos no es natural.

6) Existe un paralelismo muy grande entre el formalismo y resultados de modelos funcionales duales, por una parte, y los sistemas lineales de control, por otra. Esto permite obtener nuevos resultados en la Teoría de control tales como las estimaciones del mínimo tiempo de control en sistemas con retardo y neutros, y resultados sobre la asignación del espectro de sistemas lineales distribuidos de lazo cerrado.

Estas relaciones, en nuestra opinión, no se han explotado lo suficiente.

7) Los resultados sobre los modelos funcionales duales tienen aplicaciones en diferentes campos. Por ejemplo, el "modelo tipo Nagy y Foiaş" que hemos introducido permite aplicar los modelos funcionales a muchas nuevas clases de operadores, por ejemplo, a todos los generadores de c_0-grupos y generadores de semigrupos, relacionados con sistemas con retardo y neutros.

En algunos casos, se puede obtener también un criterio de generación de semigrupos más simple que el Teorema de Hille-Iosida-Phillips.

Nuestros resultados sobre el modelo de Xia de operadores subnormales nos permitieron obtener una nueva descripción de dominios de cuadraturas que no son simplemente conexos. Existen también aplicaciones de estos métodos al estudio de análogos de sistemas lineales con el tiempo multidimensional.

Referencias

[1] J. Agler, An abstract approach to model theory, in Surveys of Some Recent Results in Operator Theory, vol. II, Longman Sci. Tech., Harlow 1988, pp. 1–23.

[2] Agler, J.; Stankus, M., m-isometric transformations of Hilbert space. I, II, III. Integral Equations Operator Theory 21 (1995), no. 4, 383–429.; ibid. 23 (1995), no. 1, 1–48; ibid. 24 (1996), no. 4, 379–421.

[3] M. S. Agranovich, Elliptic operators on closed manifolds, in Partial Differential Equations VI (Encyclopaedia Math. Sci., vol. 63), Springer-Verlag, Berlin—New York 1994, pp. 1–130.

[4] Agranovich, M. S., Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries. Uspekhi Mat. Nauk 57 (2002), no. 5(347), 3–78; translation in Russian Math. Surveys 57 (2002), no. 5, 847–920.

[5] Albrecht, E.; Eschmeier, J. Analytic functional models and local spectral theory. Proc. London Math. Soc. (3) 75 (1997), no. 2, 323–348.

[6] Albrecht, E.; Eschmeier, J.; Neumann, M., Some topics in the theory of decomposable operators. Advances in invariant subspaces and other results of operator theory (Timişoara and Herculane, 1984), 15–34, Oper. Theory Adv. Appl., 17, Birkhäuser, Basel, 1986.

[7] A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg, Beurling's theorem for the Bergman space, Acta Math., 177 (1996), 275–310.

[8] B. P. Allahverdiev, Extensions, dilations and functional models of Dirac operators. Integral Equations Operator Theory 51 (2005), no. 4, 459–475.

[9] D. Aharonov, H. S. Shapiro, Domains on which analytic functions satisfy quadrature identities, J. D'Analyse Mathématique, 30, 1976, 39–73.

[10] Ambrozie, C., Müller, V., Invariant subspaces for polynomially bounded operators. J. Funct. Anal. 213 (2004), no. 2, 321–345.

[11] C. Ambrozie, Engliš, M., Müller, V., Operator tuples and analytic models over general domains in $\mathbb{C}^n$. J. Operator Theory 47 (2002), no. 2, 287–302.

[12] S. I. Ansari, A generalization of Lomonosov's inequality and its applications to invariant subspaces. Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 10, 2905–2909

[13] Aronszajn, N.; Smith, K. T. Invariant subspaces of completely continuous operators. Ann. of Math. (2) 60, (1954), 345–350.

[14] Arveson, William Subalgebras of C^*-algebras. III. Multivariable operator theory. Acta Math. 181 (1998), no. 2, 159–228.

[15] Avdonin, Sergei A.; Ivanov, Sergei A. Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[16] J. A. Ball, V. Vinnikov, Overdetermined multidimensional systems: state space and frequency domain methods. Mathematical systems theory in biology, communications, computation, and finance (Notre Dame, IN, 2002), 63–119, IMA Vol. Math. Appl., 134, Springer, New York, 2003.

[17] L. de Branges, Hilbert spaces of entire functions. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

[18] L. de Branges, J. Rovnyak, Canonical models in quantum scattering theory. Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics, 1966. (Proc. Adv. Sem. Math. Res. Center, U.S. Army, Theoret. Chem. Inst., Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1965), pp. 295–392 Wiley, New York.

[19] J. A. Ball, I. Gohberg and L. Rodman, Interpolation of Rational Matrix Functions, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 45, Basel etc., Birkhäuser, 1990.

[20] Beauzamy, B. Un opérateur sans sous-espace invariant: simplification de l'exemple de P. Enflo. (French) Integral Equations Operator Theory 8 (1985), no. 3, 314–384.

[21] S. Brown,Some invariant subspaces for subnormal operators, Integral Equations and Oper. Theory 1 (1978), 310-333.

[22] Brown, Scott W.(1-HI) Hyponormal operators with thick spectra have invariant subspaces. Ann. of Math. (2) 125 (1987), no. 1, 93–103.

[23] Brodskiĭ, V. M.; Gohberg, I. C.; Kreĭn, M. G. The characteristic functions of an invertible operator. (Russian) Acta Sci. Math. (Szeged) 32 (1971), 141–164.

[24] Cheremshantsev, S. E., Quantum scattering by a Brownian particle with complex potential, Russian, Teoret. i Mat. Fiz. 56 (1983), 125–130; Engl. transl. in Theoret. Math. Phys. 56 (1983).

[25] H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy, Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 56. AMS, Providence, RI, 1985.

[26] K. F. Clancey, Completeness of eigenfunctions of seminormal operators Acta Sci. Math. (Szeged) 39 (1977), 31–37.

[27] Clark, Douglas N.; Morrel, Judith H. On Toeplitz operators and similarity. Amer. J. Math. 100 (1978), no. 5, 973–986.

[28] D. N. Clark, On the structure of rational Toeplitz operators. Contributions to analysis and geometry (Baltimore, Md., 1980), pp. 63–72, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md., 1981.

[29] Chevreau, B.; Li, W. S.; Pearcy, C. A new Lomonosov lemma. J. Operator Theory 40 (1998), no. 2, 409–417.

[30] I. Colojoară, C. Foiaş, Theory of generalized spectral operators. Mathematics and its Applications, Vol. 9. Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris, 1968.

[31] Conway, John B. The theory of subnormal operators. Mathematical Surveys and Monographs, 36. AMS, Providence, RI, 1991.

[32] Cowen, M. and Douglas, R., Complex geometry and operator theory, Acta Math. 141 (1976), 187–261.

[33] Curtain, Ruth F.; Zwart, Hans An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. Texts in Applied Mathematics, 21. Springer-Verlag, New York, 1995.

[34] Davis, Ch. J-unitary dilation of a general operator. Acta Sci. Math. (Szeged) 31 1970 75–86.

[35] M. A. Dritschel, S. McCullough, Model theory for hyponormal contractions. Integral Equations Operator Theory 36 (2000), no. 2, 182–192.

[36] S. W. Drury, A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball. Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), no. 3, 300–304.

[37] Dunford, N.; Schwartz, J. T. Linear operators. Part II: Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space. Interscience Publishers John Wiley & Sons New York-London 1963.

[38] Dunford, N.; Schwartz, J. T. Linear operators. Part III. Spectral operators. John Wiley & Sons, Inc., New York, etc., 1971.

[39] P. L. Duren, Extension of the result of Beurling on invariant subspaces, Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1961) 320–324.

[40] P. L. Duren. Theory of H^p-spaces, Acad. Press, N. Y., 1970.

[41] Quadrature domains and their applications. Operator Theory: Adv. and Appl., 156. Birkhüser Verlag, Basel, 2005, Gustafsson, D. Khavinson, and M. Putinar, eds.

[42] P. H. Enflo, On the invariant subspace problem for Banach spaces, Enflo, P. On the invariant subspace problem in Banach spaces. Sminaire Maurey–Schwartz (1975–1976); Acta Math. 158 (1987), 213 – 313.

[43] J. Eschmeier, M. Putinar, Bishop's condition (β) and rich extensions of linear operators. Indiana Univ. Math. J. 37 (1988), no. 2, 325–348.

[44] C. Foias, A. E. Frazho, The commutant lifting approach to interpolation problems. Operator Theory: Advances and Applications, 44. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[45] B. Gustafsson, C. He, P. Milanfar, M. Putinar, Reconstructing planar domains from their moments, Inverse Problems 16 (2000), 1053–1070.

[46] B. Gustafsson, M. Putinar, Linear analysis of quadrature domains. IV, Quadrature domains and their applications, 173–194, Oper. Theory Adv. Appl., 156, Birkhüser, Basel, 2005.

[47] Hadwin, Don An operator still not satisfying Lomonosov's hypothesis. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 10, 3039–3041.

[48] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, Introduction to functional-differential equations. Applied Mathematical Sciences, 99. Springer-Verlag, New York, 1993.

[49] Halmos, P. R. A Hilbert space problem book. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 19. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., etc., 1967.

[50] H. Hedenmalm, A factorization theorem for square area-integrable analytic functions. J. Reine Angew. Math. 422 (1991), 45–68.

[51] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics, 199. Springer, N. Y., 2000.

[52] D. Hitt, Invariant subspaces of H^2 of the annulus, Pacific J. Mathematics, 134 (1988), 101–120.

[53] J. W. Helton, Operators with a representation as multiplication by x on a Sobolev space. Hilbert space operators and operator algebras (Proc. Internat. Conf., Tihany, 1970), pp. 279–287. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 5, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[54] Hille, E. and R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups. Third printing. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI. AMS, Providence, R. I., 1974.

[55] Hruščev, S. V.; N. K. Nikol'skii and B. S. Pavlov, Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels, Lecture Notes in Math., pp. 214–335, vol. 864 (1981), Springer, V. P. Havin and N. K. Nikol'skii, eds.

[56] M. Q. Jacobs, C. E. Langenhop, "Criteria for function space controllability of linear neutral systems", *SIAM J. Control Optimiz.*, vol. 14, no. 6, pp. 1009–1048, 1976.

[57] Jung, I.; Ko, E.; Pearcy, C. On quasinilpotent operators. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 7, 2121–2127.

[58] I. C. Gogberg, M. G. Krein, Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Transl. Math. Monographs, vol. 24, AMS, 1970.

[59] Kapustin, V. V. Almost isometric operators: a functional model, invariant subspaces, the commutant. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 201 (1992), transl. in J. Math. Sci. 78 (1996), no. 2, 181–194.

[60] Keldyš, M. V. The completeness of eigenfunctions of certain classes of nonselfadjoint linear operators. (Russian) Uspehi Mat. Nauk 26 (1971), no. 4(160), 15–41. Engl. transl.: Russian Math. Surveys 26 (1971), no. 4, 15–44.

[61] I. Lasiecka, R. Triggiani, Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories. II. Abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon. Encyclopedia of Math. and its Appl., 75. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[62] Laursen, K. B.; Neumann, M. M. An introduction to local spectral theory. London Mathematical Society Monographs. New Series, 20. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[63] Lax, Peter D.; Phillips, Ralph S. Scattering theory. Pure and Applied Mathematics, Vol. 26. Acad. Press, N. Y. -London, 1967.

[64] Ljubič, Ju. I.; Macaev, V. I. Operators with separable spectrum. (Russian) Mat. Sbornik (N.S.) 56 (98) 1962 433–468; English transl. in Amer. Math. Soc. Translations (2) 47 (1965).

[65] E. Bruce Lee, Wu-Sheng Lu, Feedback with delays: stabilization of linear time-delay and two-dimensional systems. *Signal Processing*, Part II, 155–193, *IMA Vol. Math. Appl.*, 23, Springer, New York, 1990.

[66] Livšic, M. S. Operators, oscillations, waves (open systems). Translated from the Russian by Scripta Technica, Ltd. English translation edited by R. Herden. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 34.

[67] M. S. Livšic, N. Kravitsky, A. S. Markus, V. Vinnikov, Theory of commuting nonselfadjoint operators. Mathematics and its Applications, 332. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995.

[68] Lomonosov, V. I. Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator. (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. 7 (1973), no. 3, 55–56.

[69] Lomonosov, V. An extension of Burnside's theorem to infinite-dimensional spaces. Israel J. Math. 75 (1991), no. 2-3, 329–339.

[70] M. M. Malamud, L. L. Oridoroga, Analog of the Birkhoff theorem and the completeness results for fractional order differential equations. (English. English summary) Russ. J. Math. Phys. 8 (2001), no. 3, 287–308.

[71] N. Makarov, A. Poltoratski, Meromorphic inner functions, Toeplitz kernels, and the uncertainty principle, preprint, http://www.math.caltech.edu/people/makarov.html

[72] A. Manitius, Necessary and sufficient conditions of approximate controllability for general linear retarded systems, SIAM J. Control Optim., vol. 19, no. 4, pp. 516–532, 1981.

[73] A. Manitius, R. Triggiani, "Functional space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions", SIAM J. Control Optim., vol. 16, no. 4, pp. 599–645, 1978.

[74] Martin, Mircea; Putinar, Mihai Lectures on hyponormal operators. Operator Theory: Advances and Applications, 39. Birkhäuser Verlag, Basel, 1989. 304 pp.

[75] J. E. McCarthy, L. Yang, Subnormal operators and quadrature domains, Advances in Math., 127, No. 1, 1997, 52-72.

[76] Markus, A. S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. With an appendix by M. V. Keldysh. Translations of Mathematical Monographs, 71. AMS, Providence, RI, 1988.

[77] B. W. McEnnis, Purely contractive analytic functions and characteristic functions of noncontractions. Acta Sci. Math. (Szeged) 41 (1979), no. 1-2, 161–172.

[78] Naboko, S. N. Functional model of perturbation theory and its applications to scattering theory. (Russian) Boundary value problems of mathematical physics, 10. Trudy Mat. Inst. Steklov. 147 (1980), 86–114, 203.

[79] Naboko, S.; Romanov, R. Spectral singularities, Szökefalvi-Nagy-Foias functional model and the spectral analysis of the Boltzmann operator. Recent advances in operator theory and related topics (Szeged, 1999), 473–490, Oper. Theory Adv. Appl., 127, Birkhüser, Basel, 2001.

[80] Kuperin, Y. A., Naboko, S. N., Romanov, R. V. Spectral analysis of the transport operator: a functional model approach. Indiana Univ. Math. J. 51 (2002), no. 6, 1389–1425.

[81] von Neumann, John, On rings of operators. Reduction theory. Ann. of Math. (2) 50, (1949), 401–485.

[82] von Neumann, John, Mathematical foundations of quantum mechanics. Princeton University Press, Princeton, 1955.

[83] Nikol′skiĭ, N. K. Treatise on the shift operator. Spectral function theory. Springer, Berlin, 1986.

[84] Nikolski, Nikolai K. Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 2. Model operators and systems. Mathematical Surveys and Monographs, 93. AMS, Providence, RI, 2002.

[85] A unified approach to functional models, and the transcription problem, Operator Theory: Adv. Appls., 41, Birkhäuser, 1989, pp. 405–434; The Gohberg anniversary collection (Calgary, 1988), vol. 2, H. Dym et al., eds.

[86] A. Olofsson, Wandering subspace theorems. Integral Eqs. Oper. Theory 51 (2005), no. 3, 395–409.

[87] L. L. Oridoroga, S. Hassi, Completeness theorems for Dirac-type operators with boundary conditions of general form that depend on the spectral parameter. (Russian) Mat. Zametki 74 (2003), no. 2, 316–320; translation in Math. Notes 74 (2003), no. 1-2, 302–307.

[88] D. A. O'Connor, T. J. Tarn, On the function space controllability of linear neutral systems, *SIAM J. Control Optimiz.*, 21 (1983), 306–329.

[89] Pavlov, B. S. Conditions for separation of the spectral components of a dissipative operator. (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 39 (1975), 123–148, 240; Translation in Mathematics of the USSR-Izvestiya.

[90] Pavlov, B. S. Spectral analysis of a dissipative singular Schrödinger operator in terms of a functional model. Partial differential equations, VIII, 87–153, Encyclopaedia Math. Sci., 65, Springer, Berlin, 1996.

[91] J.D. Pincus, D. Xia, J. Xia, The analytic model of a hyponormal operator with rank one self-commutator. Integral Eqs. Operator Theory, 7, No. 4, 1984, 516–535; No. 6, 1984, 893–894.

[92] Prunaru, B. On a theorem of S. Brown and V. Lomonosov. Integral Equations Operator Theory 24 (1996), no. 2, 248–249.

[93] Prunaru, B. Invariant subspaces for bounded operators with large localizable spectrum. Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 8, 2365–2372.

[94] M. Putinar, Linear analysis of quadrature domains III, J. Math. Anal. Appl., 239 (1999), 101–117.

[95] M. Putinar, S. Sundberg, A skew normal dilation of the numerical range of an operator, Math. Ann. 331 (2005), 345–357.

[96] H. Radjavi, P. Rosenthal, Invariant subspaces. Second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.

[97] C. J. Read, A solution of the invariant subspace problem, Bull. London Math. Soc., 16 (1984), 337–401.

[98] Read, C. J. Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem. J. London Math. Soc. (2) 56 (1997), no. 3, 595–606.

[99] Chr. Remling, Schrodinger operators and de Branges spaces, J. Funct. Anal., 196 (2002), 323-394.

[100] S. Richter, Invariant subspaces of the Dirichlet shift. J. Reine Angew. Math. 386 (1988), 205–220.

[101] M. Rosenblum, A concrete spectral theory for self-adjoint Toeplitz operators. Amer. J. Math. 87 1965 709–718.

[102] D. Salamon, "Control and Observation of Neutral Systems", Research Notes on Mathematics 91, Pitman, London, 1984.

[103] A. Simonič An extension of Lomonosov's techniques to non-compact operators. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 3, 975–995.

[104] Sz.-Nagy, B. and C. Foias, *Harmonic analysis of operators on a Hilbert space*, North-Holland, Amsterdam, and Akad. Kiadó, Budapest, 1970.

[105] Schwartz, J., Some non-selfadjoint operators II. A family of operators yielding Friedrichs' method. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 619–626.

[106] A. L. Shields, Weighted shift operators and analytic function theory. Topics in operator theory, pp. 49–128. Math. Surveys, No. 13, AMS, Providence, R.I., 1974.

[107] S. Shimorin, Commutant lifting and factorization of reproducing kernels. J. Funct. Anal. 224 (2005), no. 1, 134–159.

[108] S. Shimorin, On Beurling-type theorems in weighted l^2 and Bergman spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 6, 1777–1787.

[109] Škalikov, A. A. The completeness of the eigen- and associated functions of an ordinary differential operator with nonregular splitting boundary conditions. (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. 10 (1976), no. 4, 69–80. English transl. in: Functional Anal. Appl. 10 (1976), no. 4, 305–316 (1977).

[110] Solomyak, B. M.; Vol'berg, A. L. Operator of multiplication by an analytic matrix-valued function. Toeplitz operators and spectral function theory, 193–207, Oper. Theory Adv. Appl., 42, Birkhäuser, Basel, 1989.

[111] O. Staffans, Quadratic optimal control of stable well-posed systems, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 3679–3715.

[112] O. Staffans, Well-posed linear systems. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 103. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[113] A. Tikhonov, A functional model and duality of spectral components for operators with a continuous spectrum on a curve. Algebra i Analiz 14 (2002), no. 4, 158–195; transl. in St. Petersburg Math. J. 14 (2003), no. 4, 655–682.

[114] J. E. Thomson, Approximation in the mean by polynomials. Ann. of Math. (2) 133 (1991), no. 3, 477–507.

[115] V. A. Tolokonnikov, "Extension problem to invertible matrix", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 117, no. 4, pp. 1023–1030, 1993.

[116] D. Wang, Similarity of smooth Toeplitz operators, J. Oper. Theory 12, 319–330.

[117] D. Xia, The analytic model of a subnormal operator, Integral Eqs. Operator Theory 10, (1987), 358–289.

[118] D. Xia, Analytic theory of subnormal operators, Integral Eqs. Operator Theory 10, (1987), 880–903.

[119] D. Xia, On pure subnormal operators with finite rank self-commutators and related operator tuples, Integral Eqs. Operator Theory 24, No. 1 (1996), 106–125.

[120] D. Xia, On the analytic model of a class of hyponormal operators. Integral Equations Operator Theory 6 (1983), no. 1, 134–157.

[121] Cheng-Zhong Xu and G. Sallet, On spectrum and Riesz basis assignment of infinite-dimensional linear systems by bounded linear feedbacks, SIAM J. Control Optim., 34, no. 2, (1996), 521–541.

[122] Yadav, B. S. The invariant subspace problem. Nieuw Arch. Wiskd. (5) 6 (2005), no. 2, 148–152.

[123] E. Zuazua, Some problems and results on the controllability of partial differential equations. European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996), 276–311, Progr. Math., 169, Birkhauser, Basel, 1998.

Artículos de D. Yakubovich

[Y1] An algorithm of complementation of a polynomial rectangular matrix up to a square one with the prescribed determinant, Kibernetika y Vychislitel'naya Tehnika, 62 (1984), 85-89 (Kiev, Naukova Dumka).

[Y2] Conditions for unicellularity of weighted shift operators, Soviet Math. Dokl., 30 (1984), no. 2, pp. 494-497.

[Y3] Invariant subspaces of weighted shift operators, Zapiski Nauchn. Semin. Leningrad Otdel.Mat. Inst. Steklov (LOMI), 141 (1985), pp.100-143, transl. in J. of Soviet Mathematics, 37 No. 5, 1987, 1323-1346.

[Y4] Similarity models of Toeplitz operators, Zapiski Nauchn. Semin. Leningrad Otdel.Mat. Inst. Steklov (LOMI), 157 (1987), pp.113-123.

[Y5] Multiplication operators on special Riemann surfaces as models of rational Toeplitz operators, Soviet Math. Dokl., 38 (1989), no. 2, pp. 400-404.

[Y6] Invariant subspaces of the operator of multiplication by z in the space E_p in a multiply connected domain, Zapiski Nauchn. Semin. Leningrad Otdel.Mat. Inst. Steklov (LOMI), 178 (1989), pp.166-183, Engl. translation in: J. Soviet Math. 61, vol. 2 (1992), 2046-2056.

[Y7] Riemann surface models of Toeplitz operators, Operator Theory: Advances and Appl., 42(1989), 305-415.

[Y8] (Co-authors: A.L.Vol'berg, V.V.Peller) A brief excursion to the theory of hyponormal operators, Algebra i Analiz (Leningrad USSR Acad.Sci.), 2 (1990), no.2 ,pp.1-38, transl. in Leningrad Math. J 2 (1991), No. 2, 211-243.

[Y9] On the spectral theory of Toeplitz operators with smooth symbols, Algebra i Analiz (Leningrad USSR Acad.Sci.), 3 (1991), no. 4 ,pp. 207-225, English transl. in St. Petersburg Math. J. 3(1992), No. 4, 903-921.

[Y10] Spectral properties of smooth pertubations of normal operators with planar Lebesgue spectrum, Indiana Univ. Mathematics Journal, 42, No. 1, 1993, 55-83.

[Y11] Spectral muliplicity of Toeplitz operators with smooth symbols, American J. of Mathematics, 115, no. 6 (1993), 1335-1346.

[Y12] Dual analytic models of seminormal operators, Integral Eqs. Operator Theory 23 (1995), 353-371.

[Y13] A review of the book by Kehe Zhu "Operator theory in function spaces" Algebra i Analiz 5 No. 5 (1993), 220-244; transl. in St. Peterburg Math. J. 5 (1994), No. 5, 1023-1044.

[Y14] Local spectral multiplicity of a linear operator with respect to a measure, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 222 (1995), Issled. po Lineinym Operatoram i Teorii Funkcii. 23, 293–306, 311; translation in J. Math. Sci. (New York) 87 (1997), no. 5, 3971–3979.

[Y15] (con S.M.V. Lunel) A functional model approach to linear neutral functional equations, Integral Eqs. Operator Theory 27 (1997), 347–378.

[Y16] Subnormal operators of finite type I. Xia's model and real algebraic curves in C^2, Revista Matematica Iberoamericana, 14, no. 1 (1998), 95-115.

[Y17] (con V.A. Yakubovich) A local analogue of the Popov Frequency criterion for the absolute stability of a nonlinear system, Doklady Mathematics, 61, No. 2 (2000), 305-308 (translated from Doklady Akademii Nauk, Russian).

[Y18] A note on hyponormal operators, associated with quadrature domains, Operator theory, Advances and Applications, vol. 123, p. 513-525. Birkhauser, Basel, etc., 2001. (The Moshe Livsic Anniversary Volume, D. Alpay, V. Vinnikov, eds.)

[Y19] (con V. Alvarez y José M. Rodríguez) Estimates for nonlinear harmonic "measures" on trees, Michigan Mathematical Journal 49 (2001), no. 1, 47-64.

[Y20] (con José M. Rodríguez), A Kolmogorov-Szego-Krein type condition for weighted Sobolev spaces, Indiana Univ. Math. J. 54 No. 2 (2005), 575-598.

Prepublicaciones y trabajos en preparación de D. Yakubovich

[P1] Modelling of Toeplitz operators with smooth positevely winded symbols by multiplication operators, Institut Mittag-Leffler Report No. 2, 1990/91.

[P2] Spectral properties of smooth finite rank pertubations of a planar Lebesgue spectrum cyclic normal operator, Institut Mittag-Leffler Report No. 15, 1990/91.

[P3] Analytic models of seminormal operators with smooth symbols, en preparación.

[P4] D. V. Yakubovich, "Vector semi-Fredholm Toeplitz operators and mean winding numbers", *to appear* .

[P5] (con S.M.V. Lunel) Exact controllability in neutral delay equation, Proceedings of 2003 International Conference "Physics and control"in Saint Petersburg (Russia), August 20 - 22, pages 1373 - 1376. IEEE Catalog Number 03EX708C. ISBN: 0-7803-7939-X. Available at from the IEEE (http://www.ieee.org/).

[P6] Pole placement in infinite dimensions and functional models of linear operators, Proceedings of the 16th WORLD CONGRESS of the International Foundation of Automatic Control (IFAC), Prague, 2005, http://www.ifac.cz/

[P7] (con S.M.V. Lunel), Exact controllability in distributed retarded linear systems, to appear.

[P8] (con S.M.V. Lunel), Finite time exact controllability in retarded linear systems, to appear.

[P9] (con S.M.V. Lunel), Finite time exact controllability in distributed neutral linear systems and mean winding number of the characteristic function, to appear.

[P10] Exact controllability, vector corona condition and mean winding of characteristic function, Proceedings of the Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), 2004; http://www.mtns2004.be/

[P11] Real separated algebraic curves, quadrature domains, Ahlfors type functions and Operator Theory, 2005. To appear.

[P12] Nagy–Foiaş type functional models of nondissipative operators in parabolic domains, 2006. To appear.

[P13] El teorema espectral para operadores autoadjuntos, memoria en ruso, Univ. de San Petersburgo, 1999. 29 págnas.

[P14] [P14] Las clases de Schatten – von Neumann, memoria en ruso, Univ. de San Petersburgo, 1999. 23 págnas.

Artículos de D. Yakubovich honorados con un "Featured Review" en Mathematical Reviews

[Y21] Dual piecewise analytic bundle shift models of linear operators, J. Funct. Analysis 136 no.2 (1996), 294-330.

[Y22] Subnormal operators of finite type II. Structure theorems, Revista Matematica Iberoamericana 14, no. 3 (1998), 623 - 681.

[Y23] Linearly similar model of Sz.-Nagy – Foias type in a domain (in Russian), Algebra i Analiz, 15, No. 2 (2003), 180-227, English transl. in St. Petersburg Math. J. 15, No. 2 (2004), 289-321.