



No se puede usar ninguna tecnología posterior al boli

Hay que justificar todas las respuestas

APELLIDOS: _____ NOMBRE: _____ GRUPO: _____

1. (1,5 puntos) Demostrar, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $2n^3 + 3n^2 + n$ es un múltiplo de 6.
2. (3 puntos)
 - a) Demostrar que $e^x \geq ex$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de x se tiene la igualdad?
 - b) Construir la gráfica de la función $f(x) = e^x - x^2$, indicando los intervalos de convexidad y de monotonía de esta función. Calcular su número de ceros.
3. (1,5 puntos) Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x}$.
4. (2 puntos) Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no negativa tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Calcular razonadamente el siguiente límite, demostrando que se puede utilizar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{2 + f(t)} dt}{\int_0^x \sqrt{1 + f(t)} dt}.$$

5. (2 puntos) Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log^2 n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{3^n n!^2}.$$