Ejercicios Análisis I

Grado en Ciencias Físicas 2021-2022

Hoja 8: Series.

1. Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\,(n+2)}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3\,n+1}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n}{2\,n+1}\Big)^n$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$.
6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^2}{n}$.
7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^2}{n^2}$.
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{2\,n^3+6\,n+20}$.
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$.
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,n+\sqrt{n}}{n^3+2\,\sqrt{n}}$.
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{4n}}$.
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{1+\mathrm{e}^n}$.
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,n!}{n^n}$.
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$.
16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,(\log n)^{1/2}}$.
17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,\log n\,(\log(\log n))^{3/2}}$.
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-2}}$.
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+10}\right)^n$.
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{45}{1+100^{-n}}$.
22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

23. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$.

24. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$.

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$.

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$.

3. Una oruga avanza por una cuerda elástica de 100 metros de longitud a una velocidad de 1 m/h. Cada hora, alguien estira 100 metros la cuerda de forma homogénea. ¿Llegará alguna vez la oruga al final de la cuerda?

4. Dos locomotoras se desplazan en línea recta, en sentido contrario, a 30 km/h partiendo de dos puntos distantes 180 km entre sí. Una paloma sale de uno de los puntos a 60 km/h en dirección a la locomotora que viene en sentido opuesto. Cuando llega a la misma, gira y se dirige hacia la otra locomotor y repire este proceso indefinidamente. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido hasta el fatal desenlace? ¿Cuántos en cada sentido?

5. Demostrar que para todo x real, $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

6. Demostrar que

$$\sin(1) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots .$$

7. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n},$$

según los valores de $a > 0$.

8. Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{3^n\, n!}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

9. Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

10. Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

A. Si $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

B. Si todo $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente.

C. Si todo $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n a_n$ es convergente.

D. Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que todo $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^n a_n$ es convergente.

11. * Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ tiene todas las derivadas en un intervalo abierto I (finito o infinito) y existen unas constantes $A, C > 0$ tales que para todo x y todo $n \geq 0$, $|f^{(n)}(x)| \leq CA^n$. Demostrar que para todos valores de $a, x \in I$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

12. ** Demostrar que

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Indicación: Utilizar el ejercicio anterior y <u>*el teorema de Abel*</u>, que dice lo siguiente: si una serie de potencias

$$g(x) := \sum a_n x^n$$

centrada en 0 converge para $x = 1$ $\big($y por tanto, para todo $x \in (-1,1)\big)$, entonces

$$\exists \lim_{x \to 1^-} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = g(1).$$