Análisis I

Lista 7: Cálculo integral — 1º Física, curso 2021-22

1. Calcular, aplicando la definición: $\displaystyle\int_2^3 1\,dx\,,\ \int_2^3 x\,dx\ \ \int_2^3 x^2\,dx\,.$

2. Probar que la función $f(x)=[x]$ es integrable en $[0,5]$ y calcular $\int_0^5 [x]\,dx$.

3. Expresa como integrales los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,n+k}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\,(n-k)}{n^3}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+n\,k^2}$$

4. Sea f una función continua en $[a,b]$, no negativa y que cumple $\int_a^b f(x)\,dx=0$. Probar que f es cero en todos los puntos.

5. Dar un ejemplo de una función f definida en un intervalo $[a,b]$, no integrable y tal que f^2 sea integrable.

6. Sea

$$f(x)=\begin{cases} x\,, & \text{si} \quad x\in[0,1]\,,\\ x+1\,, & \text{si} \quad x\in(1,2].\end{cases}$$

Definimos F con $F(0)=0$ y

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt\,,\quad \text{si } x\in(0,2\,].$$

Determinar F de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0,2]$, aunque f no lo sea.

7. Sea f una función continua en $[a,b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a,b]$ como

$$E(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

A. Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre $[a,b]$. Demostrar que $m\le E(f)\le M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

B. Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado: *dada f, una función continua en $[a,b]$, existe $\xi\in[a,b]$ tal que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\,.$$

8. Encontrar una función f definida y continua en $[0,+\infty)$ y tal que

$$\int_0^{x^2}(1+t)\,f(t)\,dt=6\,x^4\,.$$

9. Sea $f:[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua, acotada y tal que $f(x)\ge 1$ en todo $x\ge 1$. Calcular razonadamente el siguiente límite, demostrando que se puede utilizar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x^2}\frac{f(t)}{t}\,dt\,.$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = -1 + \int_0^{x^2} \frac{e^{t^2}}{1+t^2} dt$$

Estudiar razonadamente el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

11. Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int x\,(6\,x^2 - 8)^{25}\,dx\,.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}\,.$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx\,.$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}\,.$
5. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx\,.$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,.$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}\,.$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}\,.$
9. $\displaystyle\int \log x\,dx\,.$
10. $\displaystyle\int x\,\log x\,dx\,.$
11. $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx\,.$
12. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}\,\cos 2x\,dx\,.$
13. $\displaystyle\int \sin^4 x\,\cos^6 x\,dx\,.$
14. $\displaystyle\int \arctan x\,dx\,.$

12. Calcula $\int \tan x\,dx$, $\int \tan^2 x\,dx$. Da una fórmula para $\int \tan^n x\,dx$ en términos de $\int \tan^{n-2} x\,dx$. Usa esto para calcular $\int \tan^4 x\,dx$, $\int \tan^5 x\,dx$.

13. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y, si es el caso, calcular su valor:

A. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,dx\,.$

B. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2-x-2}\,dx\,.$

C. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx\,.$

D. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4+x^2}\,dx\,.$

E. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}}\,.$

F. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,dx\,.$

F. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx\,.$

G. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\,(-\log x)^\alpha}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,.$

14. (*) Construcción de la función *Gamma de Euler*
La función Γ se define para $x > 0$ mediante

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt\,.$$

Comprobar que se verifica

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,.$$

Deducir que $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$.

Comentarios: (*) ejercicio difícil.