Ejercicios Análisis I

Grado en Ciencias Físicas 2021-2022

Hoja 6: Gráficas y Polinomio de Taylor.

1. Estudiar y representar las gráficas de las siguientes funciones en el conjunto de puntos donde estén definidas.

A. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x+2}$.

B. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4\,x + 5}$.

C. $f(x) = |x^2 - 6\,x + 5| + |x - 2|$.

D. $f(x) = 1 + \dfrac{16}{2^{1/x} - 4}$.

E. $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

F. $f(x) = e^{-x^2}$.

2. Sean f y g dos funciones continuas en a, con $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ en cada punto del intervalo $(a, b]$. Demostrar que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (a, b]$.

Deducir que $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

3. Una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es convexa si para todos $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ y se tiene que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \qquad \forall x \in [x_1, x_2].$$

i) Demuestra que si f es convexa entonces la gráfica de f en $[x_1, x_2]$ está por debajo del segmento que une $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$.

ii) Demuestra que si f es diferenciable en $]a, b[$ y f' es creciente, entonces f es convexa (en particular, si existe f'' y es estrictamente positiva, f es convexa).

4. Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 de las siguientes funciones:

A. $f(x) = \cos x$, en $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

B. $f(x) = \log x$, en $x_0 = 1$.

C. $f(x) = x^{1/2}$, en $x_0 = 1$.

D. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, en $x_0 = 0$.

E. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, en $x_0 = 0$.

F. $f(x) = \arctan x$, en $x_0 = 0$.

G. $f(x) = x^5$, en $x_0 = 3$.

H. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$, en $x_0 = 0$.

I. $f(x) = 3 + (x-1) + 2\,(x-1)^2 + 5\,(x-1)^3$ en $x_0 = 0$.

J. $f(x) = \log(1+x)$, en $x_0 = 0$.

5. Calcular los siguientes límites utilizando el polinomio de Taylor:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)^4}{\big(\log(1+x) - x\big)^6}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{-1 + \cos 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1+x)^{\frac{1}{x}} - \log(1+\mathrm{e}x)}{x^2}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)^{10}}{\mathrm{e}^x - 1 - x}$

6. Obtener, usando el Teorema de Taylor, las siguientes desigualdades para $x > 0$:

A. $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.

B. $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$.

C. $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.

7. Sea f una función 4 veces derivable en un intervalo alrededor de 0. Supongamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 + 3\,x - 5\,x^2}{x^3} = 0\,.$$

Calcular razonadamente $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

8. Aplicar el Teorema de Taylor para resolver las siguientes estimaciones:

A. Calcular $\cos(1)$ con un error menor que 10^{-3}.

B. Utilizando la función $y = \arctan x$, calcular π con un error menor que 10^{-3}. Para ello:

B.1. ¿Qué ocurre si usas la definición del polinimio de Taylor?.

B.2. Hallar un polinomio más un resto sin usar las sucesivas derivadas de la función.

B.3. ¿Bajo qué condición y por qué el polinomio hallado en el apartado anterior es el polimomio de Taylor?