

Ejercicios Análisis I

Grado en Ciencias Físicas 2020-2021

Hoja 5: Cálculo diferencial.

1. Sea f tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a . Probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x))^{1/f(x)} = e.$$

2. Calcular los siguientes límites:

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{x^4 + x^3}.$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 \sin^2 x}{\tan^3 x}.$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{3 \sin^4 x + \sin^5 x}.$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}.$

E. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{[x]}}.$

F. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^4 + x^2 + 1)}{\log(x^{10} + x^7 + 100)}.$

G. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{2x-1}.$

H. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x 2^x}{2 + x 3^x} \right)^{1/x}.$

I. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - 2x^4 + 3)^{-2/(x-1)^3}.$

J. $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\sin x|^{1/\log x}.$

K. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x + 5x^4)^{1/(6+2 \log(2x+1))}.$

L. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \log x}{\sqrt{\log x}}.$

M. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \sin(5x)}{\log \sin x}.$

N. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x \log(x + 1).$

Ñ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{(x^2 + 1)^4}.$

3. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

A. $f(x) = x^{1/3}.$

B. $f(x) = \arccos x.$

C. $f(x) = \frac{x^3}{|x|}.$

D. $f(x) = 2^{-1/|x|}.$

E. $f(x) = \frac{\sin x}{x}.$

F. $f(x) = \log |x|.$

G. $f(x) = \log \frac{e^x - 1}{x}.$

H. $f(x) = e^{-1/x^2}.$

I. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

A. $y = \log \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

B. $y = \sin \log x$.

C. $y = \log(x^2 \log^3 x)$.

D. $y = x^{\tan 2\pi x}$.

E. $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$.

F. $y = \arctan \sqrt{x^2 - 1}$.

G. $y = x^{x^{\cos x}}$.

H. $y = x^{\log x}$.

I. $y = (\log x)^x$.

J. $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$.

K. $y = \tan(x^2 + \log x + \arctan x)$.

L. $y = 2^{\sec(x^3 + 7x - 10)}$.

M. $y = \sec(\operatorname{cosec} x)$.

N. $y = (x^2 + 1)^{e^x}$.

Ñ. $y = \sqrt[5]{\cot^8 x^2}$.

O. $y = x^{1/x}$.

P. $y = \log_x e^x$.

Q. $y = e^{e^x}$.

5. Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 2, \\ ax + b, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} a + bx^2, & \text{si } |x| \leq 2, \\ \frac{1}{|x|}, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{si } x \leq 0, \\ b - x^2, & \text{si } 0 < x < 1, \\ c \arctan x, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} a + \sin \pi x, & \text{si } x \leq 0, \\ a + bx, & \text{si } 0 < x < 2, \\ ce^{x^2}, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

6. Probar que si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $y = |f(x)|$ es derivable en $x = a$.

7. ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x|x|$.

8. Sean I un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en cierto $a \in I$. Definimos

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir, demostrar:

A. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$

B. Si $\ell(x) = mx + n$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - a} = 0,$$

entonces $\ell(x) = t(x)$.

9. Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

10. Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, encontrar el mínimo valor de la función

$$F(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2}.$$

11. (*) Encontrar justificadamente el valor máximo de las funciones

$$F(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - 2|}$$

y

$$G(x) = \frac{1}{1 + |x - 1|} + \frac{1}{1 + |x + 1|}.$$

12. Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

13. Una empresa de envasado de tomate frito quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V . ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base R y la altura h de la lata para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?

14. (*) Se dice que una función f definida en un intervalo I satisface la condición de LIPSCHITZ si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ se verifica

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

En general, se dice que la función es HÖLDER continua de orden $\gamma > 0$ cuando

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma.$$

A. Probar que toda función HÖLDER continua es continua.

B. Probar que si f es HÖLDER continua de orden $\gamma > 1$, entonces f es derivable. Mostrar que, de hecho, f debe ser constante.

15. Obtener las siguientes desigualdades usando el Teorema del valor medio:

A. $1 + x \leq e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

B. $\log(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

16. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene a lo sumo una solución en $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de k existe efectivamente la solución?

17. Demostrar que la ecuación $6x^4 - 7x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

18. Demostrar que la ecuación $6x^5 + 13x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

Comentarios: (*) ejercicio difícil, (**) ejercicio muy difícil.