# ALGEBRA I. HOJA 9

**1.** Estudiar la diagonalización sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$ de las siguientes matrices y cuando diagonalicen estudiar su potencia $n$-ésima.

**a)**

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(Autovalores:$\lambda = 0, 4, 12$)

**b)**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Autovalores:$\lambda = 2, 4$)

**c)**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y su inversa. (Autovalores:$\lambda = 1, 4$ y $\lambda = 1/1, 1/4$)

**d)**

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**e)**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**f)**

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

**g)** (Rotación de ángulo $\theta$)

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

**2.** ¿Cuáles son los autovectores con autovalor nulo?

**3.** Encuentra una matriz real $3 \times 3$ que no diagonalice sobre los reales y sí lo haga sobre los complejos.

**4.** a) Obtener, en términos de los determinantes de los menores diagonales de la matriz $A$ loss coeficientes del polinomio característico

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

(Indicación: ya conocemos los coeficientes de $\lambda^3$, $\lambda^2$ y el término independiente , así que sólo hace falta que nos fijemos en los sumandos de $|A-\lambda I|$ en los que aparece $\lambda$ ).

b) Aplicar la fórmula obtenida para hallar los polinomios característicos de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y comparar los resultados con los obtenidos en el ejercicio 1.

**5.** Calcular los siguientes determinantes:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}, \qquad \left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}-\lambda I\right|$$

sol: $-\lambda^3+6\lambda^2-7\lambda+2$, $-\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda+1$