ALGEBRA I. HOJA 8

1. Encontrar bases de los siguientes subespacios:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \ + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 \ - x_3 \qquad = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5 \qquad \left.\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5$$

2. Decide si la suma $S_1 + S_2$ de subespacios de $\mathbb{R}^4$ es directa en cada uno de los siguientes casos:

- $S_1 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \qquad S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\},$
- $S_1 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \qquad S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_3 \ - x_4 \ = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}.$

3. Encontrar una base del subespacio $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} 2a + b - c + d = 0 \\ a + b + c - d = 0 \end{array} \right\}$$

4. Encontrar una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres divisibles por $x - 1$.

5. Comprobar que el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, 0, 1, -1)^T, (1, -1, 1, -1)^T\}$ coincide con el espacio de soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \ + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 \ - x_3 \qquad = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

6. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\langle (1, 0, 1, 0)^T, (2, 1, 0, -1)^T, (1, -1, 3, 1)^T \right\rangle, \\ S_2 &= \left\langle (3, 1, 0, -1)^T, (1, 1, -1, -1)^T, (7, 1, 2, -1)^T \right\rangle, \\ S_3 &= \left\langle (0, 2, 5, 0)^T \right\rangle. \end{aligned}$$

(En este ejercicio y en los siguientes $\langle v_1, v_2, \cdots \rangle$ denota el subespacio generado por $v_1, v_2, \cdots$.

7. Sean

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\langle (1, 0, 1, 0, 1)^T, (2, 1, 0, -1, 0)^T, (2, 0, 1, 0, 1)^T \right\rangle, \\ S_2 &= \left\langle (3, 1, 0, -1, 0)^T, (1, 1, -1, -1, -1)^T \right\rangle. \end{aligned}$$

Comprobar que $S_1 + S_2 = S_1$ y $S_1 \cap S_2 = S_2$.

8. Siendo $S_1 = \text{Span}\{(0,1,1,0)^T, (1,0,0,1)^T\}$ y

$$S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array} \right.$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.

9. Comprobar que son complementarios los subespacios definidos por las ecuaciones:

$$S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} -2x_1 & -5x_2 & +4x_3 & = 0 \\ -2x_1 & +7x_2 & & +4x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & & +x_4 = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

10. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de un espacio complementario de

a) $S_1 = \left\langle (0,2,5,0)^T, (-1,1,3,2)^T \right\rangle$.

b) $S_2 = \left\langle (1,1,0,0)^T, (1,0,1,0)^T, (0,0,1,1)^T, (0,1,0,1)^T \right\rangle$.

11. Hallar una base de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$, donde

$$S_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Hallar también las ecuaciones cartesianas de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$.

12. Consideramos los subespacios del espacio de polinomios de grado ≤ 3 S_1, formado por los polinomios múltiplos de $x+1$, y S_2, formado por los polinomios múltiplos de $x-1$. Hallar los subespacios suma e intersección de S_1 y S_2.

13. En $\mathbb{R}^4$ sean $U = \text{Span}\{u_1, u_2\}$ y $V = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ donde

$$u_1 = (1,1,2,-\lambda)^T, \quad u_2 = (-1,1,0,-\lambda)^T, \quad v_1 = (1,\lambda,2,-\lambda)^T, \quad v_2 = (2,3,\lambda,1)^T.$$

Hallar según los valores de λ las dimensiones de U , V, $U+V$ y $U \cap V$.

14. Sean F, G y H subespacios de un espacio vectorial V. Demostrar o dar contraejemplos de las siguientes afirmaciones.

1. $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.
2. $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$.
3. $\dim(F \cap (G + H)) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$.

15. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $V = \langle a, b, c \rangle$ y $W = \langle d, e \rangle$, donde $a = (1,2,3,4)$, $b = (2,2,2,6)$, $c = (0,2,4,4)$, $d = (1,0,-1,2)$ y $e = (2,3,0,1)$. Determinar las dimensiones de V, W, $V \cap W$ y $V + W$ y dar una base de cada espacio.

16. Se consideran las aplicaciones lineales $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.

1. Calcular su núcleo y su imagen.
2. Siendo V el subespacio $\langle(1,-1,0),(1,1,1)\rangle$ calcular $f(V)$ y $g(V)$. Calcular también $f^{-1}(0,0,0)$ y $f^{-1}(2,2,1)$.
3. Calcular $f^{-1}(W)$, siendo $W=\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1=3\lambda,\ x_2=2\lambda,\ x_3=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.
4. Calcular $g^{-1}(T)$ para $T=<(1,-1)>\subset\mathbb{R}^2$.

17. Dadas las siguientes aplicaciones lineales encontrar las ecuaciones paramétricas del núcleo y la imagen comprobando en cada caso la ecuación $\dim(Nuc\, f)+\dim(Im\, f)=\dim($*espacio inicial*$)$ e indicar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

1. $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3,x_2,x_1+x_2+x_3)$.
2. $f\colon\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2,\quad f(z_1,z_2)=(iz_1+z_2,z_1+iz_2)$.
3. $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4\quad f(x_1,x_2)=(x_1,x_1+x_2,2x_1,x_1+2x_2)$.
4. $f\colon\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ tiene como matriz $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\i&-1&0\end{pmatrix}$.