ALGEBRA I. HOJA 7

Con frecuencia usaremos n-tuplas $(x_1, \dots, x_n)$ para denotar vectores (columna) por razones tipográficas.

1) Escribir la matriz de un giro (rotación) con respecto a las bases canónicas:

a) de noventa grados en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj), alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$.

b) de ángulo α en sentido negativo alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$.

2) Hallar la matriz en las bases canónicas de la aplicación T del espacio de los polinomios de grado ≤ 3 en $\mathbb{R}^4$ dada por $T(p(x)) = (p(-1), p(1), p(-2), p(2))$.

3) Hallar las matrices en las bases canónicas de las siguientes aplicaciones:

a) La aplicación A de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y, 2x + 2y + z)$.

b) La aplicación B de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ dada por $B(z_1, z_2) = (iz_1 + 2z_2, z_1 - iz_2)$.

c) La aplicación C de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $C(x, y, z) = (x + z, y, x + y + z)$.

d) La aplicación D de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^3$ dada por $D(z_1, z_2) = (iz_1 + z_2, z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$.

e) La aplicación E de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ dada por $E(x, y) = (x, x + y, 2x, x + 2y)$.

4) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de 90 grados respecto al origen. Recordar la matriz $[T]_{B_cB_c}$ que representa a T con respecto a la base canónica. Para $i = 1, 2, 3, 4$, hallar la matriz $[T]_{B_iB_i}$ que representa a T con respecto a las siguientes bases: $B_1 = \{2e_1, e_2\}$, $B_2 = \{2e_1, 2e_2\}$, $B_3 = \{e_1, (e_1 + e_2)/\sqrt{2}\}$, y $B_4 = \{e_1 + e_2, -e_1 + e_2\}$. Calcular los determinantes y las trazas de todas las matrices anteriores.

5) Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases canónicas, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)(0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

6) Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)(0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases canónicas.

7) Hallar, haciendo un cambio de base, la expresión matricial en la base canónica de la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1, 1, 0) = (1, 1, 1), \quad f(1, 0, -1) = (0, 1, 1) \text{ y } \quad f(1, -1, 1) = (1, 2, 2).$$

8) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ en las bases canónicas por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar una base del núcleo de f.

b) Hallar unas ecuaciones cartesianas del núcleo de f.

c) Hallar una base de la imagen de f.

d) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la imagen de f.

9) Hallar para qué valores de a, el conjunto $\{(a,0,1),(0,1,1),(2,-1,a)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

10) Comprobar que una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ está formada por $\{1\}$, pero una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es $\{1, i\}$. Estos dos espacios vectoriales tienen distinta dimensión.

11) Hallar $T(1,0)$ si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal de la que sabemos que $T(3,1) = (1,2)$ y $T(-1,0) = (1,1)$.

12) Hallar la expresión matricial, con respecto a la base canónica, de la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(1,1,0) = (1,1,1), \quad T(1,0,-1) = (0,1,1) \text{ y } \quad T(1,-1,1) = (1,2,2).$$

13) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación por el ángulo α, y sea $B = \{v_1 = (2,0), v_2 = (0,1)\}$. Hallar $[T]_{BB}$ (nótese que v_1 y v_2 son perpendiculares pero no tienen la misma longitud).

14) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 \\ 1/10 & 8/10 \end{pmatrix},$$

calcular A^2, A^4, y A^8. Una pregunta para meditar sobre ella: ¿existe $\lim_{n\to\infty} A^n$?. Después de meditar, ver el problema siguiente.

15) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal defninida mediante multiplicación por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 \\ 1/10 & 8/10 \end{pmatrix},$$

donde todas las coordenadas están expresadas utilizando la base canónica $B_c = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$.

a) Calcular los autovalores de A (la definición de autovalores aparece en la Hoja 2).

b) Calcular Av_1 y Av_2, donde $v_1 = (2,1), v_2 = (1,-1)$.

Hallar la matriz que representa a la Identidad $Id(v) = v$, $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuando

c) la base en el espacio de partida es la canónica, y en el espacio de llegada es $B' = \{v_1 = (2,1), v_2 = (1,-1)\}$;

d) la base en el espacio de partida es B', y en el de llegada es B_c.

e) Hallar la matriz $D = [T]_{B'B'}$ que representa a T con respecto a B'. Observese que D es la matriz diagonal formada con los autovalores de A.

f) Hallar $\lim_{n\to\infty} A^n$. **Sugerencia:** usar $[T]_{B_cB_c} = A = [I]_{B_cB'}[T]_{B'B'}[I]_{B'B_c}$.