ALGEBRA I. HOJA 6

1) Calcular los determinantes siguientes:

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sol: 12, -4, -1, -8.

2) Calcular los determinantes de las matrices dadas a continuación:

$$a)\left|\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}\right| \qquad b)\left|\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}\right|$$

Sol: a) -1, b) 1.

3) Demostrar que los siguientes determinantes son nulos:

$$a)\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ d & e & f \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad d)\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

4) a) Comprobar que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) del espacio es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

y hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos $(1, 2, 1)$, $(-1, 3, 0)$, $(2, 1, 3)$.
b) Escribir la ecuación de una recta del plano que pasa por los puntos (a, b), (c, d) del plano y hallar la ecuación cartesiana de la recta del plano que pasa por los puntos $(-1, -2)$, $(2, 2)$.

5) Hallar $\det A$, donde A es la siguiente matriz $n \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

A este determinante se le llama determinante de Vandermonde de orden n. Comentario: si la respuesta no os sale, podéis encontrarla en el libro.

6) a) Siendo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P(x)$ un polinomio de grado 3, hallar sus coeficientes para que $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(2) = -1$, $P(3) = 0$. Sugerencia: usar el determinante de Vandermonde.
Sol: $2 + \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$.
b)Demostrar que siempre se puede encontrar un polinomio de grado 3 que cumpla las condiciones $\{P(x_i) = y_i\}_{i=1}^4$ siempre que todos los $x_1, \dots, x_4$ sean distintos.
c) Generalizar el resultado b): dados n+1 pares de puntos $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n+1}$ con $x_1, \dots, x_{n+1}$ distintos, hay un único polinomio $P(x)$ de grado n que cumple $P(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n + 1$.
Obsérvese que la parte c) nos indica cómo hallar una función polinómica de grado n que pase por $n + 1$ puntos del plano siempre y cuando no haya dos puntos en la misma vertical.

7) Encontrar los valores de a para que las siguientes matrices sean invertibles:

$$a)\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad b)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad c)\begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

Sol: a) $a \neq 1$, $a \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $a \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ b) $a \neq 2$ y $a \neq -2$ c) $a \neq -1$ y $a \neq \frac{1}{2}$.

8) Sean matrices cuadradas $A \in M_{m\times m}$, $B \in M_{n\times n}$, $C \in M_{m\times n}$ y $D \in M_{(m+n)\times(m+n)}$ una matriz que se descompone por bloques como

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que $|D| = |A||B|$ utilizando la descomposición

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

b) Demostrar, utilizando una descomposición similar, la misma igualdad $|D| = |A||B|$, en el caso

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

(Nótese que ahora $C \in M_{n\times m}$).
c) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 7 & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & 4 & -2 & & & \\ & & & 1 & 4 & 5 & & \\ & & & & & & 2 & 3 \\ & & & & & & & 2 \end{vmatrix}$$

Sol: -240.

9) **a)** Demostrar que si $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ son funciones para las que existen escalares $a_1, a_2, \cdots, a_k$ tales que

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_k(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_k(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_k) & f_2(a_k) & \cdots & f_k(a_k) \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes.

Demuestra los siguientes enunciados utilizando el apartado anterior:

b) Los polinomios $\{1, x-2, (x-2)^2, \cdots, (x-2)^n\} \subset P_{\mathbb{R}}^n[x]$ son linealmente independientes.

c) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, los polinomios $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\} \subset P_{\mathbb{R}}^n[x]$ son linealmente independientes para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

10) Comprobar que en el espacio vectorial $P_{\mathbb{R}}^n[t]$ el siguiente subconjunto es una base:

$$B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

Observación: los polinomios de esta base son los polinomios de Bernstein de grado n. (Indicación: basta probar independencia lineal (por qué?); dicha independencia se obtiene fácilmente considerando la matriz de sus coordenadas respecto de la base canónica y observando que su determinante es no nulo).

11) Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, los vectores fila determinan un paralelogramo, y los vectores columna otro. Calcular sus áreas (puedes hacerlo representando cada uno de estos paralelogramos dentro de un rectángulo adecuado y restando las áreas de triángulos complementarios). Medita sobre el resultado. En general el volumen de un paralelepípedo formado for n vectores linealmente independientes coincide con el valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son estos vectores.