

ALGEBRA I. HOJA 5

Con frecuencia usaremos n -tuplas (x_1, \dots, x_n) para denotar vectores (columna) por razones tipográficas.

1. Sea \mathbb{K} el cuerpo de los números reales o bien el cuerpo de los números complejos (es decir, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dado un $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$ el conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en \mathbb{K} . Decidir razonadamente si los siguientes conjuntos, con la adición y multiplicación por escalares en \mathbb{K} definidas de manera natural, forman espacios vectoriales:

1. $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$.
2. el conjunto de polinomios en $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$ de grado *igual* a n .
3. $\{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es continua}\}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
4. $\{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tal que } f \text{ es continua}\}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), donde \mathbb{R}_+ denota los números positivos.

2. Sea $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$ el espacio de todos los polinomios sobre \mathbb{R} . Comprobar que con la suma y el producto por escalares definidos de la manera natural, $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial. Hallar una base para $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$.

3. ¿Cuáles de las siguientes familias de vectores forman un sistema de generadores de \mathbb{R}^3 ?

1. $\{(1 \ 2 \ 3)^T, (1 \ 2 \ 5)^T\}$,
2. $\{(1 \ 2 \ 3)^T, (1 \ 2 \ 5)^T, (0 \ 0 \ -4)^T\}$,
3. $\{(1 \ 2 \ 3)^T, (1 \ 2 \ 5)^T, (0 \ 0 \ -4)^T, (1 \ 1 \ 1)^T\}$.

4. ¿ Cuáles de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior son linealmente independientes?

5. ¿ Cuáles de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior forman una base de \mathbb{R}^3 ?

6. Determinar si la familia de vectores $\{(1, 1 + 2i), (i, -2 + i)\}$ es una base del espacio vectorial complejo \mathbb{C}^2 .

7. Un subespacio S es un subconjunto de un espacio vectorial V que por sí mismo también es un espacio vectorial. Para comprobar que S es un subespacio, basta ver que está cerrado bajo la suma de vectores y el producto de vectores por escalares; no es necesario verificar que las operaciones satisfacen los axiomas de un e. v., porque éstos se cumplen en todo V , y por tanto en $S \subset V$. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4 .

1. $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
2. $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$.
3. $C = \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \mid x_1 = 1\}$.
4. $D = \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.
5. $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$.

8. Comprobar si son o no espacios vectoriales sobre \mathbb{R} los siguientes conjuntos, con las operaciones indicadas:

1. $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$.
2. $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$, $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

9. Se considera el espacio vectorial real $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$.

1. ¿Es $W_1 = \{p(x) \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{R}} : (x-1) \text{ divide a } p(x)\}$ un subespacio de $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$?
2. ¿Es $W_2 = \{p(x) \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{R}} : p(2) = 0\}$ un subespacio de $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$?
3. Escribir, si es posible, los polinomios $1, x, x^2, x^3$ como combinación lineal del sistema de vectores formado por $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ y sus tres primeras derivadas $p'(x), p''(x)$ y $p'''(x)$.

10. Se consideran los subconjuntos V y W de \mathbb{C}^4 donde

$$V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 = -iz_2 + (1+i)z_3 + z_4\}$$

y las ecuaciones paramétricas de W son

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \mu + i\beta \\ z_2 = \lambda + i\mu \\ z_3 = i\lambda \\ z_4 = \lambda + i\beta \end{array} \right\}, \quad \lambda, \mu, \beta \in \mathbb{C}.$$

1. Comprobar si V y W son subespacios de \mathbb{C}^4 .
2. Comprobar si es cierto que $W \subset V$.
3. Responder a las mismas preguntas, si en las ecuaciones paramétricas de W sólo se admiten λ, μ, β reales.

11. El vector v del espacio vectorial \mathbb{R}^2 tiene coordenadas $(1, 2)$ respecto de la base $B = \{v_1, v_2\}$. Hallar las coordenadas de v en la base $B' = \{u_1, u_2\}$ en \mathbb{R}^2 , sabiendo que

$$v_1 = 3u_1 + 2u_2; \quad v_2 = 4u_1 - u_2.$$

12. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

- i) $f_1: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_1(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- ii) $f_2: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_2(A) = A + B$, con $B \in M_2(\mathbb{R})$ fija.
- iii) $f_3: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_3(A) = AB - BA$, donde $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- iv) $f_4: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow V$ dada por $f_4(A) = A + A^T$, donde $V = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A = A^T\}$.
- v) $f_5: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow W$ dada por $f_5(A) = AA^T$, donde $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^T\}$.
- vi) $f_6: \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ dada por $f_6(p(x)) = p(x+1)$.
- vii) $f_7: \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ dada por $f_7(p(x)) = p(x) + 1$.
- viii) $f_8: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_8(v) = \lambda_0 v$ con $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ fijo.
- ix) $f_9: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_9(v) = v_0 - v$ con $v_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo.
- x) $f_{10}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_{10}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1, x_3)$.
- xi) $f_{11}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_{11}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, 0, 0)$.
- xii) $f_{12}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_{12}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.